

Ein eichinvariantes Modell für die
 π^+ -Photo- und Elektroproduktion im
Energiebereich um 2 GeV

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Physik
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

vorgelegt von

Rainer Gerlich

aus Bad Homburg v.d.H.

Marburg/Lahn 1976

Druck: Erich Mauersberger, Marburg

Ein eichinvariantes Modell für die
 π^+ -Photo- und Elektroproduktion im
Energiebereich um 2 GeV

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

des Fachbereichs Physik

der Philipps-Universität Marburg/Lahn

vorgelegt von

Rainer Gerlich

aus Bad Homburg v.d.H.

Marburg/Lahn 1976

Druck: Erich Mauersberger, Marburg



Vom Fachbereich Physik der Philipps-Universität
Marburg/Lahn als

Dissertation angenommen am 25.6.1976

Tag der mündlichen Prüfung: 10.8.1976

Berichterstatter: Prof. Dr. W. Kerler

Mitberichterstatter: Priv.-Doz. Dr. F. Gutbrod

Inhaltsverzeichnis

	Seite
<u>1. Einleitung</u>	1
<u>2. Ein Modell für Hadron-Hadron- und Photon-Hadron-Vertizes</u>	
2.1. Vertexmodelle für zusammengesetzte Teilchen	5
2.2. Herleitung eines Ansatzes für die Vertex-Funktion ...	7
2.3. Das Modell für die Vertex-Funktion für Hadron-Hadron- und Photon-Hadron-Vertizes	12
2.4. Zusammenhang der Modell-Vertex-Funktion mit dem Vektormeson-Dominanz-Modell	16
<u>3. Konsistenzbetrachtungen zum verwendeten Modell und Vergleich mit experimentellen Werten</u>	
3.1. Form des Modells für Hadron-Hadron-Vertizes für praktische Rechnungen	20
3.2. Art und Methode der Konsistenz-Rechnungen	22
3.3. Ergebnisse der Konsistenzbetrachtungen für die Näherungsansätze der Vertex-Funktionen	25
3.4. Vergleich der aus den Näherungsansätzen abgeleiteten Formfaktoren mit gebräuchlichen Formfaktoren	30
3.4.1. Hadron-Hadron-Vertizes	30
3.4.2. Photon-Hadron-Vertizes	31
<u>4. Ein eichinvariantes Modell für die Photo- und Elektroproduktion eines Pions</u>	
4.1. Beschreibung des allgemeinen Modells	33
4.2. Form des Modells für praktische Rechnungen	37
4.3. Verhalten des Modells für hohe Energien	39

<u>5. Rechnungen zur Pion-Photo- und Elektroproduktion</u>	
5.1. Überblick über die durchgeführten Rechnungen	42
5.2. Ein Algorithmus für die algebraische Berechnung von Helizitätsamplituden und Partialwellen- entwicklungskoeffizienten für Teilchen mit Spin	44
5.3. Numerische Rechenmethoden	51
<u>6. Ergebnisse für die Pion-Photo- und Elektroproduktion</u>	
6.1. Beschreibung der Daten im Energiebereich um 2 GeV durch das BTM	56
6.2. Beschreibung der Daten im Energiebereich um 2 GeV durch das entwickelte Modell	58
6.2.1. Photoproduktion	58
6.2.2. Elektroproduktion	71
6.3. Diskussion der Ergebnisse	80
6.4. Voraussagen für die Elektroproduktion	83
<u>7. Zusammenfassung</u>	85
<u>Literaturverzeichnis</u>	87

Anhang

1. Definitionen verwendeter Größen	A 1
2. Ein Lösungsansatz für die Bethe-Salpeter- Vertex-Funktion für Spin 0-Teilchen	A 11
3. Die Grundelemente für den Algorithmus zur Berechnung der Helizitätsamplituden und der Partialwellenentwicklungskoeffizienten	A 15
4. Helizitätsamplituden und Partialwellenentwicklungs- koeffizienten für das Born-Term-Modell (BTM) für die Photo- und Elektroproduktion eines Pions	A 19
5. Vereinfachtes Flußdiagramm des FORTRAN-Programms	A 22
6. Matrixelemente für die verschiedenen Meson-Nukleon-Vertizes	A 23
7. Partialwellenentwicklungskoeffizienten für die Pion-Photo- und Elektroproduktion	A 33

1. Einleitung

Im Energiebereich der Resonanzen und im Hochenergiebereich der Pion-Photo- und Elektroproduktion können die experimentellen Daten durch verschiedene Resonanzmodelle [1] bzw. Regge-Modelle [1, 2-5] beschrieben werden. Im Energiebereich um 2 GeV ist das Regge-Modell kaum mehr anwendbar, weil dort sowohl s- als auch t-Kanal-Austausch in gleichem Maße beitragen, während man mit dem Regge-Modell nur die Vorstellung des t-Kanal-Austausches verknüpft. Das üblicherweise als Näherung verwendete eichinvariante Born-Term-Modell (BTM) kann die t-Abhängigkeit der experimentell bekannten Größen [6-16] nur bis $t \approx -\mu^2$ qualitativ beschreiben. Im Resonanzbereich werden zur Beschreibung eines größeren t-Bereiches zur Korrektur der Born-Amplitude Dispersionsrelationen verwendet. Bei Energien oberhalb des Resonanzbereichs [17] benötigt man für die Dispersionsrelationen die Parameter vieler Resonanzen, so daß es mit wachsender, aber noch keineswegs sehr hoher Energie immer schwieriger wird, diese Methode anzuwenden. Die bei hohen Energien zur Korrektur des BTM angewandte Absorptionsmethode [18,19] läßt sich im Energiezwischenbereich bei der Pion-Produktion nicht verwenden, da die theoretischen Kurven des BTM schon unterhalb der Daten liegen und Absorption die theoretischen Werte noch weiter verkleinern würde. Mit dem Vektormeson-Dominanz-Modell (VDM) [20] können durch Verwendung experimenteller Ergebnisse [1], wie z.B. der Pion-Photoproduktion, die Daten der Pion-Elektroproduktion beschrieben werden [21,22]. Ebenso kann man mit einem dualen Modell [23] nach Bestimmung der Modellparameter in der Photoproduktion die Elektroproduktionsdaten beschreiben. Durch Modifikation des BTM bei den Nukleon- und Meson-Formfaktoren und Multiplikation der Pion-Produktionsamplitude mit einem t-abhängigen exponentiellen Faktor, der in Anlehnung an die Vorstellung von einem gebundenen Zustand des Nukleons berücksichtigt wird [24], ist befriedigende Übereinstimmung der Kurven dieses Modells mit den Daten der Elektroproduktion zu erreichen.

Es stellt sich nun die Frage, ob sich für den Energiebereich um 2 GeV ein Modell entwickeln läßt, das die Daten der Photo- und auch der Elektroproduktion beschreiben kann. Neben der Eichinvarianz ist von einem solchen Modell zu fordern, daß es insofern in sich konsistent ist, als nachträglich

keine modellfremden Eingriffe zur befriedigenden Beschreibung der Daten vorgenommen werden müssen. Weiter soll die Anzahl der aus anderen Experimenten benötigten Daten nicht zu groß sein. Eine unerläßliche Voraussetzung ist weiter die Rechenbarkeit des Modells, damit ein Vergleich mit den experimentellen Daten möglich ist.

Das BTM erfüllt im Grunde alle diese Forderungen und besitzt auch Beiträge von s- und t-Kanal-Austausch, die in der gleichen Größenordnung liegen, wie es in diesem Energiezwischenbereich erforderlich ist. Es ist jedoch noch keine so gute Näherung, daß es die Daten befriedigend beschreiben kann.

Für die Entwicklung einer besseren Näherung gibt es zwei Gesichtspunkte: Erstens scheinen die Polterme allein die experimentellen Ergebnisse nicht erklären zu können, so daß der nächsthöhere Beitrag, der Box-graph [25], der keinen Poltermcharakter besitzt, berücksichtigt werden sollte; zweitens sollten statt der hadronischen Punktvertizes solche mit abfallenden Vertex-Funktionen im Modell auftreten. Es soll daher zunächst ein Modell für die hadronischen Vertizes entwickelt werden, das diese Eigenschaften besitzt, und dann durch Ankopplung des Photons an alle geladenen Linien des Modellvertex ein eichinvariantes Modell für die geladene Pion-Photo- und Elektroproduktion abgeleitet werden.

Die beiden genannten Aspekte lassen sich in einem Modell verwirklichen, das auf der Vorstellung von einem zusammengesetzten Nukleon beruht. Eine Näherung für die hadronischen Vertizes, die der Vorstellung von zusammengesetzten Hadronen entspricht, ist die Dreiecksnäherung [26,27,28]. Sie wurde bereits bei Rechnungen zu den Nukleon-Formfaktoren [28] verwendet und ergibt dann schon qualitativ das richtige asymptotische Abfallverhalten, wenn man für die Vertex-Funktionen im Dreiecksdiagramm einfache Näherungen einsetzt; dadurch werden praktische Rechnungen ermöglicht.

Außerdem erhält man bei Ankopplung des Photons an das Dreiecksdiagramm ein Boxdiagramm.

Im einzelnen wird wie folgt vorgegangen: In Kapitel 2 wird, ausgehend von der Dreiecksnäherung für die hadronischen Vertizes und von Dispersionsdarstellungen für Vertex-Funktionen, ein einfacher Ansatz für die Vertex-Funktionen im Dreiecksdiagramm hergeleitet und Eigenschaften dieses Ansatzes, wie z.B. die Beziehung zum VDM, werden diskutiert. Konsistenzbetrachtungen sowie ein Vergleich mit experimentellen Ergebnissen für Formfaktoren werden für diesen Ansatz in Kapitel 3 durchgeführt. Aus der Dreiecksnäherung für den Pion-Nukleon-Vertex wird in Kap. 4 das eichinvariante Modell für die π^+ -Photo- und Elektroproduktion abgeleitet und das Hochenergieverhalten der verschiedenen Beiträge zur Pion-Produktionsamplitude untersucht. In Kap. 5 wird ein Überblick über die durchgeführten Rechnungen sowie über benutzte Rechentechniken, u.a. über einen Algorithmus zur Berechnung von Helizitätsamplituden und Partialwellenentwicklungskoeffizienten in geschlossener Form, gegeben. Die Ergebnisse der Rechnungen zur π^+ -Photo- und Elektroproduktion werden in Kap. 6 mit den experimentellen Werten verglichen und die Übereinstimmung der theoretischen Werte mit dem Experiment wird diskutiert. Eine Zusammenfassung aller Ergebnisse wird in Kap. 7 gegeben.

Notationen und Definitionen für die verwendeten Größen sind in Anhang 1 zusammengestellt. In Anhang 2 wird aus der Bethe-Salpetergleichung [29] für skalare Teilchen mit vereinfachenden Voraussetzungen der verwendete Ansatz für die Vertex-Funktionen hergeleitet. Die Elemente des in Kap. 3 beschriebenen Algorithmus zur Berechnung von Helizitätsamplituden und Partialwellenentwicklungskoeffizienten werden in Anhang 3 angegeben. Dieses Verfahren wird in Anhang 4 am Beispiel des BTM für die π^+ -Photo- und Elektroproduktion demonstriert. Anhang 5 zeigt ein vereinfachtes Flußdiagramm des für die numerischen Rechnungen verwendeten Programms.

In Anhang 6 sind explizit die Ausdrücke für die Meson-Nukleon-Vertizes und in Anhang 7 die Partialwellenentwicklungskoeffizienten für die Helizitätsamplituden der verschiedenen FEYNMAN-Graphen der π^+ -Photo- und Elektroproduktion angegeben.

2. Ein Modell für Hadron-Hadron- und Photon-Hadron-Vertizes

2.1. Vertex-Modelle für zusammengesetzte Teilchen

Der übliche Ansatz [27, 28] für einen Vertex mit zusammengesetzten Teilchen ist das Dreiecksdiagramm. Die theoretische Begründung für diesen Ansatz findet man bei SYMANZIK [27].

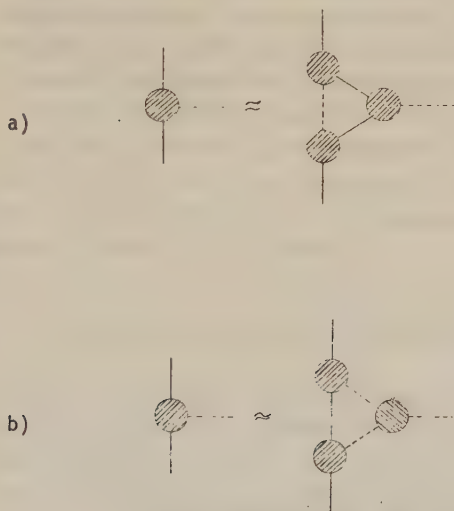


Fig. 1: Beiträge zum Meson-Nukleon-Vertex

- a) mit einer inneren Meson-Linie
- b) mit zwei inneren Meson-Linien

Im Sinne von SYMANZIK kann ein Meson-Nukleon-Vertex in der niedrigsten Näherung durch die in Fig. 1 gezeigten Diagramme beschrieben werden, die der niedrigsten Ordnung von 2-Teilchen-irreduziblen Diagrammen einer allgemeinen "Struktur"-Entwicklung entsprechen. Ein Punktvertex

existiert bei zusammengesetzten Teilchen nicht [27,30]. Als Konstituenten sollen im folgenden die Hadronen selbst aufgefaßt werden, etwa im Sinne des Bootstraps von CHEW [31]. Da bei SYMANZIK in Anlehnung an die Konstruktion von ZIMMERMANN [32] nicht zwischen "elementar" oder "zusammengesetzt" unterschieden wird, entspricht diese Auffassung aber auch dem Konzept seiner Strukturentwicklung.

Von den Hadronen werden die wichtigsten Mesonen (mit $S = 0$ einschließlich der Resonanzen) und die Nukleonen betrachtet. Nukleonresonanzen werden als Meson-Nukleon-Systeme angesehen. Die Meson-Nukleon-Kopplung wird als grundlegende Kopplung betrachtet. Damit kann die 3-Mesonen-Wechselwirkung, wie sie in Fig. 1b vorkommt, auf die Meson-Nukleon-Wechselwirkung zurückgeführt werden (Fig.2).



Fig. 2: Zurückführung der 3-Mesonen-Wechselwirkung auf die Meson-Nukleon-Wechselwirkung

Über die in den Fig. 1 und 2 dargestellten Diagramme erhält man dann Integralbeziehungen für die Meson-Nukleon-Vertex-Funktion. Der gesamte Vertex läßt sich in diesem Fall näherungsweise durch die Summe der Einzelbeiträge mit verschiedenen Hadronen in den Dreiecksdiagrammen beschreiben, wie es in Fig. 3 dargestellt ist. Summiert wird dabei nur über solche Kombinationen, die mit den Quantenzahlen der Teilchen verträglich sind.

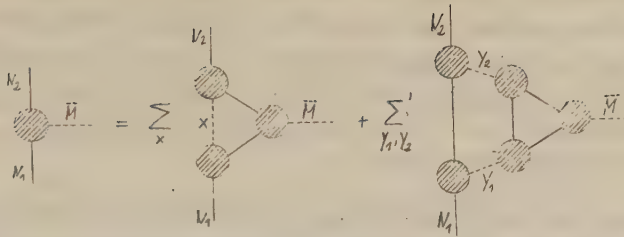


Fig. 3: Integralgleichung für den Meson-Nukleon-Vertex

Die Bestimmung der Meson-Nukleon-Vertex-Funktion aus diesem Gleichungssystem ist wegen der mathematischen Kompliziertheit praktisch nicht möglich. Es läßt sich jedoch zu Konsistenzbetrachtungen von Näherungsansätzen allgemeiner Art verwenden.

2.2. Herleitung eines Ansatzes für die Vertex-Funktion

In diesem Abschnitt wird zunächst die dem Integralgleichungssystem der Fig. 3 entsprechende Integralgleichung für skalare Teilchen von nur einer Teilchenart behandelt. Der Ansatz wird dann auf den komplizierteren Fall von mehreren Teilchensorten mit Spin verallgemeinert.

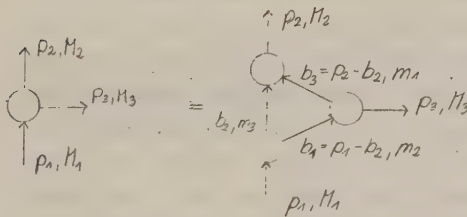


Fig. 4: Integralgleichung für die Vertex-Funktion skalärer Teilchen

Das Integralgleichungssystem der Fig. 3 vereinfacht sich für skalare Teilchen einer Sorte zu der in Fig. 4 dargestellten Integralgleichung; diese lautet:

$$T(p_1, p_2, p_3) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 b_2 \left\{ T(p_2 - b_2, p_2, -b_2) \frac{1}{(p_2 - b_2)^2 - m_1^2 + i\epsilon} \right. \\ \cdot T(p_1 - b_2, p_2 - b_2, p_3) \frac{1}{(p_1 - b_2)^2 - m_2^2 + i\epsilon} \\ \left. \cdot T(p_1, p_1 - b_2, b_2) \frac{1}{b_2^2 - m_3^2 + i\epsilon} \right\} \quad (2.1)$$

Um zu einer Näherung zu kommen, die die Abhängigkeit der Vertex-Funktion von den externen Impulsen beschreibt, für den Fall von Teilchen mit Spin konvergente Integrale wie in (2.1) liefert, und die nicht im Widerspruch zu allgemeinen (analytischen) Eigenschaften der Vertex-Funktion steht, soll von allgemeinen Darstellungen für die Vertex-Funktion ausgegangen werden.

Zwei Arten solcher Darstellungen stehen zur Verfügung: eine (störungstheoretisch bewiesene) Spektraldarstellung und mehrfache Dispersionsrelationen. Für die Vertex-Funktion hat NAKANISHI [33] die folgende Spektraldarstellung allgemein abgeleitet:

$$T(p_1, p_2, p_3) = \int_0^1 d\eta_1 \int_0^1 d\eta_2 \int_0^1 d\eta_3 \delta(1 - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3) \cdot \int_{\alpha_{\text{Min}}}^{\infty} d\alpha \frac{\varphi(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \alpha)}{\alpha - \eta_1 p_1^2 - \eta_2 p_2^2 - \eta_3 p_3^2 - i\varepsilon} \quad (2.2)$$

Wie NAKANISHI [34] gezeigt hat, gelten die von NAMBU [35] vorgeschlagenen mehrfachen Dispersionsrelationen, falls keine anomalen Schwellen auftreten. Die 2-fache Dispersionsdarstellung hat die Form

$$T(p_1, p_2, p_3) = \int_{s_{\text{Min}}}^{\infty} ds' \int_{t_{\text{Min}}}^{\infty} dt' \frac{\varphi(s', t')}{(s' - p_1^2 - i\varepsilon)(t' - p_2^2 - i\varepsilon)} \quad (2.3)$$

und die 3-fache lautet:

$$T(p_1, p_2, p_3) = \int_{s_{\text{Min}}}^{\infty} ds' \int_{t_{\text{Min}}}^{\infty} dt' \int_{u_{\text{Min}}}^{\infty} du' \frac{\varphi(s', t', u')}{(s' - p_1^2 - i\varepsilon)(t' - p_2^2 - i\varepsilon)(u' - p_3^2 - i\varepsilon)} \quad (2.4)$$

Diese Darstellungen sollen Anhaltspunkte geben für einen Näherungsansatz für die Vertex-Funktion.

Eine Näherung, bei der die Impulse separiert werden, ergibt sich aus Gl. (2.2), indem man je zwei der η_k zu Null macht und das Integral über α durch Polterme ersetzt:

$$T(p_1, p_2, p_3) = T_P \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{n_i} \frac{g_{ij} (M_i^2 - M_{ij}^2)}{(p_i^2 - M_{ij}^2 + i\epsilon)} \quad (2.5)$$

Die Summe über i sorgt für gleiche Behandlung der drei Teilchen. T_P ist die Vertex-Funktion für einen Punkt-Vertex und im Falle skalarer Teilchen gleich der Kopplungskonstanten g . Die Normierungsbedingung für $p_i^2 = M_i^2$ ($i = 1, 2, 3$)

$$T(p_1, p_2, p_3) \Big|_{\substack{p_i^2 = M_i^2 \\ i=1,2,3}} = g \equiv T_P \quad (2.6)$$

ist dann erfüllt, wenn für die Gewichte g_{ij} gilt:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{n_i} g_{ij} = 1 \quad (2.7)$$

Wenn man den Näherungsansatz (2.5) auf den Fall mit Spin zu verallgemeinern versucht, konvergiert jedoch das entsprechende Integral der Gl. (2.1) nicht immer. Geeigneter erscheinen dann die Darstellungen (2.3) und (2.4), da sie mit einem Produkt von zwei bzw. drei Poltermen die Konvergenz des Integrals mit einfachen Ansätzen für die Spektralfunktion garantieren. Solche Ansätze erhält man beispielsweise durch Faktorisierung der Spektralfunktionen und Ersetzung der Integrale durch eine Summe über Polterme. Diese Darstellung beinhaltet also sowohl eine Approximation des Kontinuums durch Resonanzen, wie sie auch Polterme unterhalb der Schwelle erfaßt. Entsprechend den Darstellungen (2.3) und (2.4) hat man damit die beiden folgenden Möglichkeiten:

$$T(p_1, p_2, p_3) = T_P \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^{n_l} \sum_{m=1}^{n_k} g_{j'k'lm} \frac{(M_l^2 - M_{j'l}^2)(M_k^2 - M_{km}^2)}{(p_{j'}^2 - M_{j'l}^2 + i\epsilon)(p_k^2 - M_{km}^2 + i\epsilon)} \quad (2.8)$$

($j'k$) = (123)

oder $T(\rho_1, \rho_2, \rho_3) =$

$$\frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \sum_{l=1}^{n_3} g_{ikl} \frac{(M_1^2 - M_{1i}^2)(M_2^2 - M_{2k}^2)(M_3^2 - M_{3l}^2)}{(\rho_1^2 - M_{1i}^2 + i\epsilon)(\rho_2^2 - M_{2k}^2 + i\epsilon)(\rho_3^2 - M_{3l}^2 + i\epsilon)} \quad (2.9)$$

Es soll nun gezeigt werden, unter welchen Voraussetzungen die Ansätze (2.8) und (2.9) die Integralgleichung (2.1) erfüllen. *) Da für beide Ansätze die Diskussion in ähnlicher Weise verläuft, wird sie nur für (2.9) für den Fall $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ und $M_{ij}^2 - M_k^2 = \Lambda^2$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) wiedergegeben.

Durch Einsetzen von Gl. (2.9) in Gl. (2.1) erhält man mit $g \equiv g_{111}$ und durch FEYNMAN-Parametrisierung sowie nach Ausführung der b_1 -, b_2 - und b_3 -Integrationen:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{g^2}{16\pi^2} \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_3 \delta(1 - z_1 - z_2 - z_3) \cdot \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{N(\rho_k^2, z_\ell)} - \sum_{\ell=1}^3 \left[\frac{1}{N(\rho_k^2, z_\ell) + z_\ell \Lambda^2} - \frac{1}{N(\rho_k^2, z_\ell) + (1 - z_\ell) \Lambda^2} \right] - \frac{1}{N(\rho_k^2, z_\ell) + \Lambda^2} \right. \\ &\quad - \Lambda^2 \sum_{\ell=1}^3 \left(\frac{z_\ell}{[N(\rho_k^2, z_\ell) + z_\ell \Lambda^2]^2} - \frac{1 - z_\ell}{[N(\rho_k^2, z_\ell) + (1 - z_\ell) \Lambda^2]^2} \right) + \frac{\Lambda^2}{[N(\rho_k^2, z_\ell) + \Lambda^2]^3} \\ &\quad + 2\Lambda^4 \sum_{\ell=1}^3 \frac{z_1 z_2 z_3}{z_\ell} \left(\frac{1}{[N(\rho_k^2, z_\ell) + (1 - z_\ell) \Lambda^2]^3} - \frac{1}{[N(\rho_k^2, z_\ell) + \Lambda^2]^3} \right) \\ &\quad \left. - 6\Lambda^6 \frac{z_1 z_2 z_3}{[N(\rho_k^2, z_\ell) + \Lambda^2]^4} \right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

wobei

$$N(\rho_k^2, z_\ell) = -z_2 z_3 \rho_1^2 - z_1 z_3 \rho_2^2 - z_1 z_2 \rho_3^2 + z_1 m_1^2 + z_2 m_2^2 + z_3 m_3^2 + i\epsilon$$

ist.

*) In Anhang 2 wird weiter gezeigt, daß ein solcher Ansatz die Bethe-Salpeter-Gleichung unter vereinfachenden Voraussetzungen erfüllt.

Aus Gl. (2.10) ist zu ersehen, daß für $\max_{i=1}^3 p_i^2 \ll \min_{i=1}^3 M_i^2$ g^2 unabhängig von den externen Impulsen und damit eine Konstante wird. Für eine reelle Lösung für g ist dann die Bedingung $\Lambda^2 > 0$ hinreichend. Im allgemeinen Fall, wenn die Differenzen $M_{ij}^2 - M_k^2$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) nicht alle gleich sind, hat man die allgemeinere Bedingung $M_{ij}^2 - M_k^2 > 0$.

Die in Gl. (2.8) bzw. (2.9) auftretenden Terme sind bis auf Faktoren identisch mit den Propagatoren von Spin 0-Teilchen. Diese beiden Ansätze bewirken also das Einschieben von Teilchenpropagatoren an den Linien eines Vertex, wie in Fig. 5^{*)} dargestellt. Ein Modell, bei dem ein Konzept dieser Art auftritt, ist beispielsweise auch das VDM.

Bei Verallgemeinerung der Ansätze (2.8) und (2.9) auf Teilchen mit Spin liegt es nahe, anstelle der Propagatoren für Spin 0-Teilchen die entsprechenden Propagatoren für Teilchen mit Spin und für die Γ_P ebenfalls die entsprechenden Ausdrücke einzusetzen. Die für den Fall mit Spin abgeänderten Ansätze erfüllen die der Gl. (2.1) entsprechende Integralgleichung unter den oben genannten Bedingungen. Für den Fall mit Spin besitzt nämlich der Nenner des Integranden der Integralgleichung wieder die gleiche Struktur wie im Fall von Spin 0-Teilchen. Im Zähler sind jetzt nach der Feynman-Parametrisierung und Ausführung der Impulsintegrationen neben einem Term, der nur Massen enthält, noch Terme vorhanden, die mindestens ein inneres Produkt von äußeren Impulsen als Faktor enthalten. Für die Bedingung $\max_{i=1}^3 p_i^2 \ll \min_{i=1}^3 M_i^2$ wird dann der Term, der nur Massen enthält, zum führenden Term, der positiv ist. Da der Nenner die gleiche Struktur wie im Spin 0-Fall besitzt, erhält man für $\max_{i=1}^3 p_i^2 \ll \min_{i=1}^3 M_i^2$ wieder eine konstante und reelle Lösung für die Kopplungskonstante.

Die in diesem Abschnitt hergeleiteten und untersuchten Ansätze sollen im folgenden für die Konstruktion eines Modells der Vertex-Funktion im allgemeinen Fall verwendet werden. Es ist hier noch hervorzuheben, daß die Modell-Vertex-Funktionen asymptotisch verschwinden, also eine wesentliche Eigenschaft der Vertizes zusammengesetzter Teilchen tragen.

^{*)} Siehe S. 13

2.3. Das Modell für die Vertex-Funktion für Hadron-Hadron- und Photon-Hadron-Vertizes

In diesem Abschnitt sollen nun, aufbauend auf den Ergebnissen des Abschnitts 2.2., für Hadron-Hadron- und Photon-Hadron-Vertizes die Ausdrücke für die Vertex-Funktionen angegeben werden:

Die Modell-Vertex-Funktionen $\Gamma(p_1, p_2, p_3)$ mit den Impulsen p_1, p_2, p_3 und den Massen M_1, M_2, M_3 sollen die Form

$$\Gamma(p_1, p_2, p_3) \equiv: \overline{T}_1^{\dagger}(p_1) \overline{T}_2^{\dagger}(p_2) \overline{T}_3^{\dagger}(p_3) : \quad (2.11a)$$

oder

$$\Gamma(p_1, p_2, p_3) \equiv: \overline{T}_P^{\dagger} \sum_{i,j,k=1}^3 \overline{T}_i^{\dagger}(p_i) \overline{T}_k^{\dagger}(p_k) : \quad *) \quad (2.11b)$$

(i,j,k) = (1,2,3)

haben. Dabei ist Γ_P der Punktvertex ^{**)} und die Funktionen $\Gamma_i(p_i)$ sind durch die Beziehung

$$\Gamma_i(p_i) = \sum_{l=1}^{n_i} w_{li} P(p_i, M_{il}) \quad (2.12)$$

gegeben. Hierbei enthalten die w_{li} Gewichts- und Normierungskonstanten und $P(p_i, M_{il})$ ist der an der Linie des Teilchens der Masse M_i eingeschobene Propagator.

*) Die Summation über i braucht nicht voll ausgeführt zu werden, wenn schon für weniger als der drei möglichen Kombinationen die Teilchen am Vertex gleich behandelt werden können. Der Wertebereich von i kann ebenfalls durch Forderung bestimmter asymptotischer Abfalleigenschaften für die Vertex-Funktion $\Gamma(p_1, p_2, p_3)$ eingeschränkt werden.

**) Die Dreifach-Punkte $::$ sollen andeuten, daß bei Teilchen mit Spin die Vertex-Funktion für einen Punkt-Vertex Γ_P an die entsprechende Stelle zwischen die Funktionen Γ_i zu setzen ist und diese selbst je nach Richtung von p_1, p_2, p_3 links oder rechts von Γ_P anzuordnen sind.

Für $P(p, M)$ ist einzusetzen:

$$P(p, M) = \begin{cases} \Delta(p, M) = \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon} & \text{Spin 0-Teilchen} \\ S(p, M) = \frac{1}{p - M + i\epsilon} & \text{für Spin 1/2-Teilchen} \\ \mathcal{D}(p, M) = \frac{-g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M^2}}{p^2 - M^2 + i\epsilon} & \text{Spin 1-Teilchen} \end{cases}$$

Als Beispiel ist in Fig. 5 der Ansatz (2.11a) für Meson-Nukleon- und 3-Mesonen-Vertizes im Fall $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ dargestellt. Zur Kennzeichnung der Näherung und zur Unterscheidung von den exakten Vertizes werden für die Vertizes andere Symbole gewählt. Die den Linien zugeordneten Massen sind in Fig. 5 angegeben.

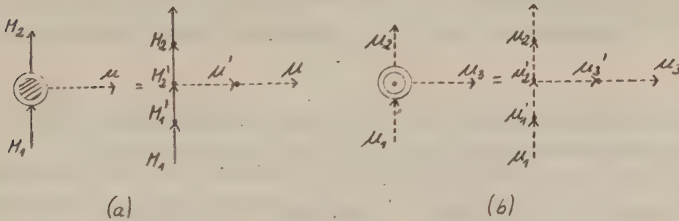


Fig. 5: Darstellung der Näherung (2.11a) für die Vertex-Funktion

- a) für den Meson-Nukleon-Vertex
- b) für den 3-Mesonen-Vertex

Die Normierung für die Funktionen $\Gamma_i(p_i)$ ist festgelegt durch die folgende Bedingung:

Ist $\psi_i(p_i)$ die Funktion, mit der das i -Teilchen am Vertex ($i = 1, 2, 3$) beschrieben wird (z.B. $u(p_i)$ für Spin 1/2-Teilchen), dann soll für $p_i^2 = M_i^2$ gelten:

$$\Gamma_i(p_i) \psi_i(p_i) = \psi_i(p_i) \quad (2.13)$$

Für Teilchen mit einem Spin größer als 1 erhält man die Funktionen

$\Gamma_i(p_i)$, indem man die entsprechenden Propagatoren für $P(p_i, M_{i1})$ einsetzt.

Die Konstanten w_{ij} haben die folgende Form:

$$w_{ei} = g_{ie} \begin{cases} (M_i^2 - M_{iL}^2) & \text{Spin 0-Teilchen} \\ (M_i - M_{iL}) & \text{für Spin 1/2-Teilchen} \\ -(M_i^2 - M_{iL}^2) & \text{Spin 1-Teilchen} \end{cases} \quad (2.14)$$

Aus der Normierungsbedingung folgt dann, daß

$$\sum_{L=1}^{n_i} g_{iL} = 1 \quad (2.15)$$

sein muß. Die Konstanten g_{ij} sind Gewichte, die für die richtige Anpassung der Spektraldarstellung für Γ_i durch die Polapproximation sorgen.

Bei einem Vertex mit einem Photon muß die aus der Vektorstromerhaltung folgende Ward-Takahashi-Identität [36,37] erfüllt sein:

$$p_{3\mu} T^{\mu\nu}(p_1, p_2; p_3) = \mathcal{P}^{-A}(p_1, M_1) - \mathcal{P}^{-A}(p_2, M_2) \quad (2.16)$$

Bildet man mit der Näherung (2.11a) für die Vertex-Funktion im Fall $M_1 = M_2$

$$p_{3\mu} T^{\mu\nu}(p_1, p_2, p_3)$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} p_{3\mu} T^{\mu\nu}(p_1, p_2, p_3) &= p_{3\mu} T_{3P}^{\mu\nu}(p_3) \overline{T}_2^{\nu}(\bar{p}_2) \overline{T}_P^P T_1^{\nu}(p_1) \\ &= \left(\sum_{L=1}^{n_3} g_{eL} \frac{M_{3L}^2 - M_3^2}{M_{3L}^2} \right) p_{3P} \overline{T}_2^{\nu}(p_2) \overline{T}_P^P T_1^{\nu}(p_1) \\ &= \left(1 - M_3^2 \sum_{L=1}^{n_3} \frac{g_{eL}^2}{M_{3L}^2} \right) \overline{T}_2^{\nu}(p_2) \left[\mathcal{P}^{-A}(p_1, M) - \mathcal{P}^{-A}(p_2, M) \right] \cdot T_1^{\nu}(p_1) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Dabei wurde berücksichtigt, daß die Vertex-Funktion $\Gamma_P^\mu = e\gamma^\mu$ für einen Punktvertex die Ward-Takahashi-Identität immer für $M_1 = M_2$ erfüllt.

Ein Vergleich von (2.17) mit der Ward-Takahashi-Identität (2.16) zeigt, daß diese dann gilt, wenn die Bedingungen

$$M_3 = 0 \quad (2.18a)$$

und

$$\begin{aligned} \Gamma_1(p_1) &= 1 \\ \Gamma_2(p_2) &= 1 \end{aligned} \quad (2.18b)$$

erfüllt sind. Für das Photon mit $M_3 = 0$ ist also noch (2.18b) in den Ansätzen (2.11) zu berücksichtigen. In Abschnitt 2.4. wird der sich daraus ergebende Zusammenhang mit dem VDM diskutiert.

Treten die Ansätze (2.11) für die Vertex-Funktion in allgemeinen Amplituden auf, dann können Produkte der Art

$$T_i(p_i) P(p_i, M_i) = \sum_{l=1}^{n_i} g_{il} P(p_i, M_{il}) P(p_i, M_i)$$

vorkommen. Im Fall von Spin 0-Teilchen sieht man sofort, daß diese Produkte durch Partialbruchzerlegung auf eine Differenz der beiden Propagatoren umgeformt werden können, so daß man statt der Amplitude mit einem Vertex mit Struktur eine Differenz von zwei Amplituden mit Punktvertizes und verschiedenen Massen erhält. Für Spin 1/2- und Spin 1-Teilchen ist eine solche Zerlegung ebenso möglich. Es gelten nämlich für $M \neq M'$ die folgenden drei Beziehungen:

$$\frac{M^2 - M'^2}{p^2 - M'^2 + i\epsilon} \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon} = \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon} - \frac{1}{p^2 - M'^2 + i\epsilon} \quad (2.19a)$$

$$\frac{M - M'}{p^2 - M'^2 + i\epsilon} \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon} = \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon} - \frac{1}{p^2 - M'^2 + i\epsilon} \quad (2.19b)$$

$$(M'^2 - M^2) \frac{-g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M'^2}}{p^2 - M'^2 + i\epsilon} \frac{-g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M^2}}{p^2 - M^2 + i\epsilon} = \frac{-g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M^2}}{p^2 - M^2 + i\epsilon} - \frac{-g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M'^2}}{p^2 - M'^2 + i\epsilon} \quad (2.19c)$$

Aus diesen Beziehungen folgt für $M_i \neq M_{i1}$ allgemein:

$$T_i(p_i) P(p_i, M_i) = P(p_i, M_i) - \sum_{\ell=1}^{n_i} g_{i\ell} P(p_i, M_{i\ell}) \quad (2.20)$$

Durch Einsetzen der durch (2.11) - (2.13) bestimmten Näherung für die Vertex-Funktion in ein Matricelement erhält man also eine Summe über Matricelemente mit Punktkopplung an den Vertizes und anderen Massen an deren Linien.

$$p_J^2 = M_J^2 \quad p_k^2 = M_k^2 \quad p_i^2 = M_i^2$$

Fig. 6: Wirkung der Näherung für die Vertex-Funktion auf den Propagator eines äußeren Teilchens des Vertex

Damit besteht zwischen den in Gl. (2.19) angegebenen Beziehungen und der von der Renormierungstheorie her bekannten Abschneidetechnik von FEYNMAN [38] und PAULI und VILLARS [39] in gewissem Sinne eine Analogie.

2.4. Zusammenhang der Modell-Vertex-Funktion mit dem Vektormeson-Dominanz-Modell (VDM)

Für das Photon mit $M_3 = 0$ ist nach Beziehung (2.18b) die Ward-Takahashi-Identität erfüllt, wenn $r_1(p_1)$ und $r_2(p_2) = 1$ gesetzt werden. Dann erhält man mit dem Ansatz von Abschnitt 2.3. eine Näherung für den Photon-Hadron-Vertex, wie sie das einfache bzw. das verallgemeinerte Vektormeson-Dominanz-Modell [40] in ähnlicher Weise beschreibt. In diesem

Fall ergibt sich für die Vertex-Funktion:

$$T^{\mu}(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = \sum_{\ell=1}^{n_3} g_{3\ell} M_{3\ell}^2 \frac{-g^{\mu\kappa} + \frac{\rho_3^{\mu} \rho_3^{\kappa}}{M_{3\ell}^2}}{\rho_3^2 - M_{3\ell}^2 + i\epsilon} T_{\rho\kappa} \quad (2.21)$$

$T^{\mu}(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ in einem Matrixelement zusammen mit entweder den Spinoren $u(\rho_1)$ und $u(\rho_2)$ oder dem Polarisationsvektor des Photons $\epsilon_{\mu}(\rho_3)$ auf, so verschwindet der Term proportional zu $\rho_3^{\mu} \rho_3^{\kappa}$, da

$$\rho_3^{\mu} T_{\rho\kappa} = P^{-\lambda}(\rho_1, H) - P^{-\lambda}(\rho_2, H)$$

bzw.

$$\epsilon_{\mu}(\rho_3, \lambda) \rho_3^{\mu} = 0$$

ist.

In Fig. 7 sind als Beispiel die Näherungen für die Photon-Nukleon- und Photon-Meson-Vertex-Funktionen nach Ansatz (2.11a) für $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ dargestellt. Zur Kennzeichnung der Näherung wird auch hier ein anderes Symbol für die Vertizes gewählt.

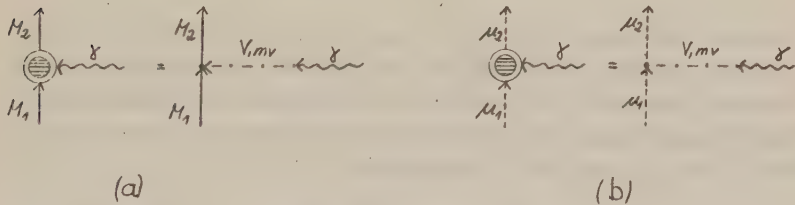


Fig. 7: Darstellung der Näherung (2.11a) für die Vertex-Funktion

- a) für den Photon-Nukleon-Vertex
- b) für den Photon-Meson-Vertex

Für die Kopplungskonstante $G_{V\gamma}$ zwischen Photon und dem eingeschobenen Vektormeson gilt im VDM mit der Bezeichnungsweise der Fig. 8a:

$$e = \frac{G_{V\gamma} g_V}{m_V^2}$$

woraus für $G_{V\gamma}$ folgt:

$$G_{V\gamma} = \frac{e}{g_V} m_V^2 \quad (2.22)$$



Fig. 8: Definition der Kopplungskonstanten

a) $G_{V\gamma}$ im VDM

b) G_{1i} zwischen dem äußeren Teilchen i und dem eingeschobenen Teilchen i'

Ähnliche Betrachtungen wie für die Kopplung zwischen Photon und eingeschobenem Vektormeson im VDM kann man auch für die Kopplung zwischen einem Teilchen des Vertex und dem an dieser Vertexlinie gemäß unserem Modell eingeschobenen Teilchen anstellen. Das soll für Ansatz (2.11a) für $p_1^2 = M_1^2$, $p_2^2 = M_{1e}^2$ und $n_3 = 1$ geschehen.

Ist g die Kopplungskonstante zwischen den Teilchen i, j, k des Vertex, G_{1i} die Kopplungskonstante zwischen dem i -Teilchen des Vertex und g'_{1i} die Kopplungskonstante zwischen den beiden anderen Teilchen j und k ($\neq i$) des Vertex und dem eingeschobenen Teilchen (vgl. Fig.8b), dann gilt für G_{1i} :

$$G_{1i} = \frac{g}{g'_{1i}} (M_i^2 - M_{1e}^2) \quad (2.23a)$$

für Spin 0-Teilchen

$$G_{ei} = \frac{g}{g_{ei}} (M_i - M_{ie}) \quad (2.23b)$$

für Spin 1/2-Teilchen

$$G_{ei} = \frac{g}{g_{ei}} (M_{ie}^2 - M_i^2) \quad (2.23c)$$

für Spin 1-Teilchen

Aus Gl.(2.23c) geht Gl. (2.22) als Spezialfall für $M_i = 0$ hervor.

3. Konsistenzbetrachtungen zum verwendeten Modell und Vergleich mit experimentellen Werten

3.1. Form des Modells für Hadron-Hadron-Vertizes für praktische Rechnungen

Um den ohnehin beträchtlichen Aufwand bei den praktischen Rechnungen in tragbaren Grenzen zu halten, wird bei der Beschreibung der Hadron-Hadron-Vertizes durch Dreiecksdiagramme eine Änderung vorgenommen, die jedoch das Konzept dieser Näherung nicht wesentlich beeinträchtigt. Untersuchungen über den Gültigkeitsbereich der Näherung werden in Abschnitt 3.3. durchgeführt.

In Fig. 9 ist ein Diagramm für den Meson-Nukleon-Vertex dargestellt, das man durch Einsetzen der Näherung (2.11a) für die Vertex-Funktion in den Graphen der Fig. 1a mit nur einer inneren Mesonlinie erhält.

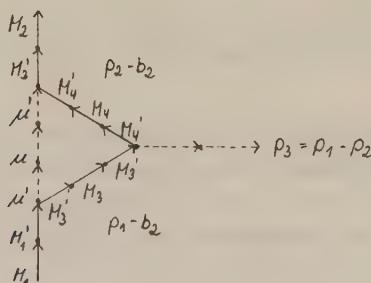


Fig. 9: Ein Dreiecksgraph für den Meson-Nukleon-Vertex in der Näherung (2.11a) für die Vertex-Funktion

Die in den Propagatoren auftretenden Massen sind der Fig. 9 zu entnehmen.

Ein Graph, wie er in Fig. 9 dargestellt ist, enthält Nenner wie

$$b_2^2 - \mu'^2 + i\epsilon, (p_1 - b_2)^2 - M_3'^2 + i\epsilon \text{ und } (p_2 - b_2)^2 - M_4'^2 + i\epsilon$$

quadratisch. Mindestens zwei der drei Ausdrücke b_2^2 , $(p_1 - b_2)^2$ und $(p_2 - b_2)^2$ sind von Integrationswinkeln abhängig.

Ist z.B.

$$\frac{1}{(p_1 - b_2)^2 - M_3'^2 + i\epsilon}$$

ein solcher winkelabhängiger Ausdruck, so kann er stets auf die Form

$$\frac{c}{z-x} \quad (3.1)$$

gebracht werden, wobei x der Kosinus des Winkels zwischen $\vec{p}_1$ und $\vec{b}_2$ ist. Üblicherweise wird ein solcher Ausdruck nach LEGENDRE-Funktionen 1. und 2. Art entwickelt:

$$\frac{c}{z-x} = c \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) Q_l(z) P_l(x) \quad (3.2)$$

Bei der in dieser Arbeit benutzten Methode zur numerischen Berechnung der Amplituden für die Vertizes wurde dieser Weg beschritten; anschließend wurde die Integration über die Winkel analytisch und die Impuls- und Energieintegration numerisch ausgeführt (vgl. dazu Abschnitt 5.3.).

Tritt ein Ausdruck wie (3.1) quadratisch auf in der Form $\frac{c'}{(z-x)^2}$, so erscheint in der Entwicklung (3.2) statt $P_l(x)$ oder $Q_l(z)$ *) eine Linearkombination dieser Funktionen und die Rechenzeit wird statt mit der 2. Potenz mit der 4. Potenz der Anzahl der Glieder einer Reihe anwachsen.

Bei den praktischen Rechnungen wird die in Kapitel 2 entwickelte Näherung für die Vertex-Funktion verwendet. Ändert man die Dreiecks-näherungen der Fig. 1 und 2 in der Weise ab, daß einer der drei Vertizes

*) Bezüglich der Definitionen für die $P_l(x)$ und $Q_l(z)$ siehe Anhang 1.

im Dreiecksdiagramm punktförmig ist, dann geht einerseits diese Änderung nicht wesentlich über den Rahmen der gesamten Näherung hinaus, andererseits kann man aber damit quadratische Ausdrücke der besprochenen Art vermeiden. Der Gültigkeitsbereich für die gesamte Näherung wird außerdem noch untersucht werden. Statt der in den Fig. 1 und 2 angegebenen Dreiecksnäherungen werden daher die der Fig. 10 für die folgenden Rechnungen verwendet.

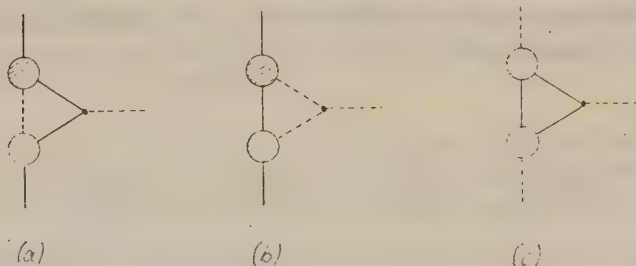


Fig. 10: Bei den numerischen Rechnungen verwendete Dreiecksnäherungen für die Hadron-Hadron-Vertizes

Die Graphen a) und b) der Fig. 10 entsprechen den Graphen der Fig. 1, der Graph c) dem Graphen der Fig. 2.

3.2. Art und Methode der Konsistenz-Rechnungen

Für die hadronischen Dreiecksdiagramme wird die Abhängigkeit vom externen Impuls $p_3 = p_1 - p_2^{*)}$ und von den Massen der Propagatoren der Näherung für die Vertex-Funktion untersucht. Dazu wird die Näherung in die Graphen der Fig. 10 eingesetzt, die Amplitude für diese Graphen für verschiedene p_3^2 -Werte berechnet und mit der p_3^2 -Abhängigkeit der Näherung verglichen, wenn die beiden Nukleonen auf der Massenschale sind. Es soll damit überprüft werden, ob diese Ansätze eine Näherungs-

*) Vgl. zur Bezeichnungsweise Fig. 9.

Lösung der Integralgleichungen sind, die man mit den Dreiecks-
näherungen der Fig. 10 für die Vertex-Funktionen erhält. Als Näherung
werden die Ansätze (2.11a) bzw. (2.11b) genommen. Bei Verwendung des
Ansatzes (2.11b) für einen Meson-Nukleon-Vertex wird nicht über die
drei möglichen Kombinationen $\Gamma_i(p_i)\Gamma_j(p_j)$ der drei Funktionen $\Gamma_k(p_k)$
($k = 1,2,3$) summiert, sondern es wird nur die bezüglich der Nukleonen
symmetrische Kombination $\Gamma_1(p_1)\Gamma_2(p_2)$ berücksichtigt. Für den 3-Meso-
nen-Vertex wird nur der bezüglich aller Teilchen symmetrische Ansatz
(2.11a) verwendet.

Die in Gl. (2.12) zur Approximation der Spektraldarstellung auftre-
tende Summe über die Massen wird durch nur einen Summanden beschrieben:

$$\Gamma_i(p_i) = P(p_i, M_{i1})$$

Für die als Stützstelle benutzte Masse M_{i1} wird für alle Teilchen
einheitlich die Beziehung

$$M_{i1}^2 = M_i^2 + \Lambda^2$$

benutzt, wobei M_i die Masse des i -Teilchens am Vertex und Λ eine Kon-
stante ist. Das Gewicht g_{i1} hat wegen der Bedingung

$$\sum_{i=1}^{n_i} g_{i1} = 1$$

den Wert 1.

Alle Rechnungen werden für die pseudoskalaren (π, η (549 MeV), η' (958 MeV))
und die skalaren (σ (450 MeV), ϵ (700 MeV), δ (970 MeV)) Mesonen ausgeführt.

Die numerischen Berechnungen werden nach den in Anhang 6 angegebenen
Beziehungen durchgeführt, die für den Fall gelten, daß die äußeren
Nukleonen des Meson-Nukleon-Vertex auf der Massenschale sind. Die Vertex-
Funktionen gehen unter dieser Bedingung in das Produkt aus Meson
Nukleon- Formfaktor $F(p_3^2)$ für ein off-shell-Meson und der Vertex-Funk-
tion für einen Punktvertex über. Der Formfaktor wird berechnet als
Quotient aus dem Matrixelement T_{fi} für ein Dreiecksdiagramm unter

Berücksichtigung der äußeren Linien und dem entsprechenden Matrixelement T_{fi}^P für den Punktvertex. Die Meson-Nukleon-Kopplungskonstanten werden über die Normierungsbedingung $F(p_3^2) \Big|_{p_3^2 = M_3^2} = 1$ bestimmt.

Für den Ansatz (2.11a) lautet dieser Formfaktor:

$$F_A(p_3^2) = -i \gamma_5 T(p_1, p_2, p_3) \Big|_{p_1^2 = M_1^2} = \frac{M_3^2 - M_{31}^2}{p_3^2 - M_{31}^2 + i\epsilon} \quad (3.3)$$

und für Ansatz (2.11b): $p_2^2 = M_2^2$

$$F_A(p_3^2) = -i \gamma_5 T(p_1, p_2, p_3) \Big|_{\substack{p_1^2 = M_1^2 \\ p_2^2 = M_2^2}} = 1 \quad (3.4)$$

Da der reziproke Formfaktor

$$F_A^{-1}(p_3^2) = \frac{1}{M_3^2 - M_{31}^2} p_3^2 + \frac{M_{31}^2}{M_{31}^2 - M_3^2}$$

für Ansatz (2.11a) von p_3^2 linear abhängt, sollte - wenn der Ansatz mit der entsprechenden Integralgleichung konsistent ist - auch der über die Dreiecksgraphen der Fig. 10 berechnete Formfaktor $F(p_3^2)$ in der reziproken Darstellung diese lineare Abhängigkeit zeigen. Daher wird versucht, $F^{-1}(p_3^2)$ durch eine Gerade nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate anzupassen. In Gl. (3.5) ist die zur Anpassung benutzte Minimierungsbedingung angegeben:

$$\sum_i g(p_3'^2) \left\{ F^{-1}(p_3'^2) - \left[\frac{1}{M_3'^2 - M_{31}'^2} p_3'^2 + \frac{M_{31}'^2}{M_{31}'^2 - M_3'^2} \right] \right\}^2 = Min. \quad (3.5)$$

Hierbei ist $g(p_3'^2)$ eine Gewichtsfunktion, M_3' sowie M_{31}' sind durch die Anpassung zu bestimmende Parameter. Durch Variation des Parameters a kann untersucht werden, ob mit einer anderen als der linearen Abhängigkeit bzgl. $p_3'^2$ die berechneten Werte $F(p_3'^2)$ besser beschrieben werden können. Für die Wahl der Gewichtsfunktion $g(p_3'^2)$ war maßgebend, daß die durch die Anpassung bestimmte Masse M_3' möglichst gut mit M_3 übereinstimmen sollte, damit die Anpassungskurve bei $p_3'^2 = M_3'^2$ möglichst genau den Wert 1 annimmt. Eine zu große Abweichung könnte eine Verfälschung

des durch die Anpassung zu bestimmenden Wertes für M_{31}^1 verursachen. Daher wird $g(p_3^2)$ so gewählt, daß die Punkte der anzupassenden Kurve um $p_3^2 = M_3^2$ ein höheres Gewicht erhalten als die Punkte p_3^2 , die weiter von der Massenschale entfernt sind. Deshalb wird für $g(p_3^2)$ die folgende Beziehung benutzt:

$$g(p_3^2) = \frac{1}{(p_3^2 - M_3^2)^n + \delta} \quad (3.6)$$

Falls nicht gesondert angegeben, werden als Werte $n = 2$ und $\delta = 0.01$ verwendet.

3.3. Ergebnisse der Konsistenzbetrachtungen für die Näherungsansätze der Vertex-Funktionen

In den Tabellen 1; 2 und 3 sind die Ergebnisse der Anpassung bei Verwendung der Ansätze (2.11a) und (2.11b) angegeben. Gegenübergestellt sind die Massen M_3 und M_3^1 sowie die Massendifferenzen $\Lambda^2 = M_{31}^2 - M_3^2$ und $\Lambda'^2 = M_{31}^2 - M_3^2$, um zu zeigen, wie gut die Ausgangswerte reproduziert werden. Da der Formfaktor für Ansatz (2.11b) konstant ist, die durch Berechnung des Dreiecksdiagramms erhaltenen Werte ^{*)} aber von p_3^2 abhängen, ist dieser Ansatz nicht konsistent mit der Integralbeziehung. Dagegen erhält man aus der Anpassung für den Ansatz (2.11a) näherungsweise wieder die Ausgangsparameter. In den Fig. 11 und 12 wird für diesen Ansatz die aus den Dreiecksdiagrammen berechnete p_3 -Abhängigkeit und die Ausgleichskurve in der reziproken Darstellung für die Graphen der Fig. 10a und 10b gezeigt.

Es ist zu erkennen, daß vor allem im raumartigen Bereich von p_3^2 die Abhängigkeit des Ansatzes über einen großen Bereich reproduziert wird, während im zeitartigen Bereich die Übereinstimmung nicht so gut ist. Für das Dreiecksdiagramm der Fig. 10a (nur ein inneres Meson) erhält man eine besonders gute Übereinstimmung zwischen Λ und Λ' , wenn das innere Meson ein skalares Teilchen ist. Im Fall des Dreiecksdiagramms der Abb. 10b (zwei innere Mesonen) wird die Übereinstimmung besser, wenn die Masse der inneren Mesonen größer ist.

^{*)} Eine befriedigende Anpassung dieser Werte war nur durch sehr starke Bewertung ($n = 40$) der Punkte um $p_3^2 = M_3^2$ zu erhalten.

externes Meson (Y) Λ^2/GeV^2 M_3^2/GeV^2	internes Meson (X) Λ^2/GeV^2 M_3^2/GeV^2					
	π	η	η'	σ	ϵ	δ
π 2.34 0.02	4.37 0.024	5.13 0.028	3.43 0.023	2.53 0.016	2.37 0.013	2.29 0.012
η 2.34 0.30	4.30 0.35	4.96 0.36	3.64 0.25	2.10 0.24	1.93 0.24	2.35 0.27
η' 2.34 0.92	3.67 0.95	4.20 0.95	4.20 0.91	1.93 0.90	2.11 0.93	1.79 0.90
σ 2.34 0.20	5.61 0.19	6.57 0.21	4.19 0.21	2.09 0.17	1.84 0.16	2.52 0.19
ϵ 2.34 0.49	5.90 0.53	5.87 0.48	4.75 0.50	2.35 0.49	2.15 0.49	2.34 0.49
δ 2.34 0.94	5.13 0.93	5.40 0.94	5.14 0.95	2.07 0.93	2.25 0.93	1.86 0.91

π 1.69 0.02	6.74 0.013	7.81 0.005	6.83 0.018	2.48 0.065	2.49 0.064	2.59 0.064
η 1.69 0.30	6.32 0.33	7.38 0.34	7.07 0.31	2.40 0.34	2.36 0.32	2.62 0.33
η' 1.69 0.92	6.18 1.03	6.45 1.05	7.02 1.02	2.12 0.88	2.25 0.90	2.20 0.88
σ 1.69 0.20	7.54 0.19	8.29 0.19	7.79 0.21	2.16 0.22	2.07 0.21	2.29 0.22
ϵ 1.69 0.49	7.18 0.51	7.94 0.52	8.00 0.53	2.11 0.50	2.05 0.50	2.14 0.50
δ 1.69 0.94	6.62 1.02	7.36 1.04	7.88 1.04	1.94 0.90	1.99 0.89	1.91 0.89

Tab. 1: Parameter für die angepaßten Kurven für Meson-Nukleon-Formfaktoren, berechnet nach dem Graphen der Fig. 1a. Der obere Teil gilt für Ansatz (2.11a), der untere für Ansatz (2.11b).

externes Meson (Y) A^2/GeV^2 M_3^2/GeV^2	interne Mesonen (Y_1, Y_2) A^2/GeV^2 M_3^2/GeV^2							
	$\pi\sigma/\sigma\pi$	$\pi\epsilon/\epsilon\pi$	$\delta\eta/\eta\delta$	$\delta\eta'/\eta'\delta$				
π 2.34 0.02	0.73 0.020	1.22 0.005	2.71 0.016	3.92 0.028				
η 2.34 0.30	$\pi\delta/\delta\pi$ 1.64 0.21	$\eta'\sigma/\sigma\eta'$ 2.10 0.32	$\eta'\epsilon/\epsilon\eta'$ 2.78 0.39	$\eta\sigma/\sigma\eta$ 1.35 0.21	$\eta\epsilon/\epsilon\eta$ 1.86 0.30			
η' 2.34 0.92	$\pi\delta/\delta\pi$ 1.12 0.90	$\eta'\sigma/\sigma\eta'$ 2.15 0.80	$\eta'\epsilon/\epsilon\eta'$ 2.70 0.87	$\eta\sigma/\sigma\eta$ 0.79 0.88	$\eta\epsilon/\epsilon\eta$ 1.37 0.92			
σ 2.34 0.20	$\pi\pi$ 0.56 0.17	$\delta\delta$ 3.51 0.18	$\eta\eta'/\eta'\eta$ 2.69 0.17	$\sigma\sigma$ 1.00 0.15	$\eta\eta$ 1.76 0.17	$\eta'\eta''$ 3.84 0.18	$\sigma\epsilon/\epsilon\sigma$ 1.64 0.17	$\epsilon\epsilon$ 2.78 0.17
ϵ 2.34 0.49	$\pi\pi$ 0.31 0.36	$\delta\delta$ 4.03 0.50	$\eta\eta'/\eta'\eta$ 2.38 0.48	$\sigma\sigma$ 0.82 0.44	$\eta\eta$ 1.40 0.44	$\eta'\eta'$ 3.24 0.49	$\sigma\epsilon/\epsilon\sigma$ 1.59 0.46	$\epsilon\epsilon$ 2.14 0.48
δ 2.34 0.94	$\delta\sigma/\sigma\delta$ 1.66 0.89	$\delta\epsilon/\epsilon\delta$ 2.36 0.93	$\pi\eta/\eta\pi$ 0.56 0.95	$\pi\eta'/\eta'\pi$ 1.45 0.95				

Tab. 2a: Parameter für die angepaßten Kurven für Meson-Nukleon-Formfaktoren, berechnet nach dem Graphen der Fig. 1b und mit Ansatz (2.11a)

externes Meson (Y) A^2/GeV^2 M_3^2/GeV^2	interne Mesonen (Y_1, Y_2) A^2/GeV^2 M_3^2/GeV^2							
	$\pi\sigma/\sigma\pi$	$\pi\epsilon/\epsilon\pi$	$\delta\eta/\eta\delta$	$\delta\eta'/\eta'\delta$				
π 2.34 0.02	1.55 0.038	2.60 0.017	6.04 0.023	9.16 0.026				
η 2.34 0.30	$\pi\delta/\delta\pi$ 1.55 0.19	$\eta'\sigma/\sigma\eta'$ 4.71 0.32	$\eta'\epsilon/\epsilon\eta'$ 6.56 0.32	$\eta\sigma/\sigma\eta$ 2.70 0.32	$\eta\epsilon/\epsilon\eta$ 4.01 0.33			
η' 2.34 0.92	$\pi\delta/\delta\pi$ 2.85 0.94	$\eta'\sigma/\sigma\eta'$ 4.05 0.94	$\eta'\epsilon/\epsilon\eta'$ 5.82 0.94	$\eta\sigma/\sigma\eta$ 1.87 0.97	$\eta\epsilon/\epsilon\eta$ 3.34 0.93			
σ 2.34 0.20	$\pi\pi$ 1.38 0.25	$\delta\delta$ 7.56 0.22	$\eta\eta'/\eta'\eta$ 7.15 0.22	$\sigma\sigma$ 1.89 0.21	$\eta\eta$ 4.16 0.21	$\eta'\eta'$ 11.0 0.21	$\sigma\epsilon/\epsilon\sigma$ 2.81 0.21	$\epsilon\epsilon$ 4.05 0.22
ϵ 2.34 0.49	$\pi\pi$ 0.93 0.56	$\delta\delta$ 8.10 0.53	$\eta\eta'/\eta'\eta$ 5.73 0.56	$\sigma\sigma$ 2.02 0.48	$\eta\eta$ 3.27 0.55	$\eta'\eta'$ 7.77 0.53	$\sigma\epsilon/\epsilon\sigma$ 3.53 0.54	$\epsilon\epsilon$ 4.95 0.54
δ 2.34 0.94	$\delta\sigma/\sigma\delta$ 3.62 0.95	$\delta\epsilon/\epsilon\delta$ 5.21 0.95	$\pi\eta/\eta\pi$ 1.78 0.87	$\pi\eta'/\eta'\pi$ 3.90 0.67				

Tab. 2b: Parameter für die angepaßten Kurven für Meson-Nukleon-Formfaktoren, berechnet nach dem Graphen der Fig. 1b und mit Ansatz (2.11b).

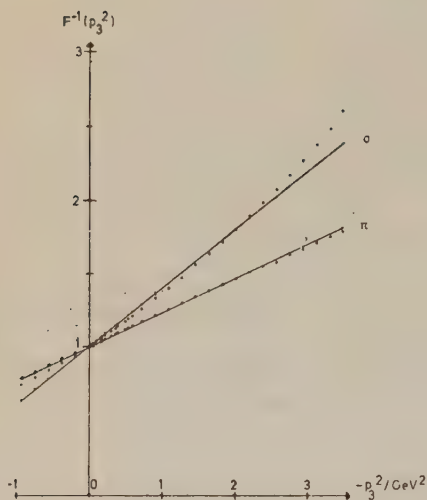


Fig.11: Reziproke Darstellung des nach Fig.10a mit Ansatz (2.11a) berechneten Pion-Nukleon-Formfaktors und der Ausgleichskurve

- a) mit dem Pion als innerem Meson
- b) mit dem σ -Meson als innerem Meson

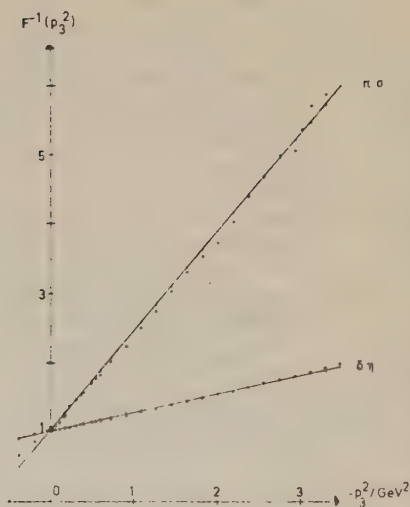


Fig.12: Reziproke Darstellung des nach Fig.10b mit Ansatz (2.11a) berechneten Pion-Nukleon-Formfaktors und der Ausgleichskurve

- a) mit π und σ als inneren Mesonen
- b) mit δ und η als inneren Mesonen

Bei dem 3-Mesonen-Vertex kann nur über einen kleinen Bereich gute Übereinstimmung zwischen dem Ansatz und den über das Dreiecksdiagramm der Fig. 10c berechneten Werten erzielt werden, da $F^{-1}(p_3^2)$ offenbar mit einer größeren Potenz als 1 von p_3^2 abhängt. Eine bessere Übereinstimmung über einen größeren Bereich von p_3^2 ist durch Wahl von $a = 1/3$ zu erreichen. Die für diesen Vertex bestimmten Parameter sind in Tab. 3 für Ansatz (2.11a) angegeben. Aus dieser Tabelle ist zu ersehen, daß zwar die Masse M_3 des Mesons gut reproduziert wird, der aus der Anpassung bestimmte Wert für Λ'^2 jedoch allgemein nicht gut mit dem Ausgangswert Λ^2 übereinstimmt. In Fig. 13 sind die Kurven für den $\pi\pi\sigma$ - und den $\pi\delta\eta$ -Vertex dargestellt.

externes Meson (Y)	externe Mesonen (Y ₁ , Y ₂)									
	Λ'^2/GeV^2					$M_3'^2/\text{GeV}^2$				
$M_3'^2/\text{GeV}^2$	$\pi\sigma$	$\pi\epsilon$	$\delta\eta$	$\delta\eta'$	$\sigma\pi$	$\epsilon\pi$	$\eta\delta$	$\eta'\delta$		
2.34 0.02	6.28 0.017	5.94 0.0014	4.17 0.025	3.37 0.025	6.25 0.00036	7.39 0.09	6.59 0.066	5.53 0.0016		
η	$\pi\delta$	$\eta'\sigma$	$\eta'\epsilon$	$\eta\sigma$	$\eta\epsilon$	$\delta\pi$	$\sigma\eta'$	$\epsilon\eta'$	$\sigma\eta$	$\epsilon\eta$
2.34 0.30	5.07 0.23	3.60 0.19	3.47 0.20	7.10 0.28	7.08 0.28	5.50 0.24	3.50 0.20	3.42 0.20	7.21 0.28	6.69 0.28
η'	$\pi\delta$	$\eta'\sigma$	$\eta'\epsilon$	$\eta\sigma$	$\eta\epsilon$	$\delta\pi$	$\sigma\eta'$	$\epsilon\eta'$	$\sigma\eta$	$\epsilon\eta$
2.34 0.92	7.10 0.90	5.08 0.87	4.70 0.86	6.47 0.89	6.30 0.89	6.27 0.89	5.60 0.88	4.80 0.86	6.45 0.89	6.12 0.89
σ	$\pi\pi$	$\delta\delta$	$\eta\eta'$	$\sigma\sigma$	$\eta\eta$	$\eta'\eta'$	$\sigma\epsilon$	$\epsilon\epsilon$	$\eta'\eta'$	$\epsilon\sigma$
2.34 0.20	5.25 0.20	7.01 0.21	6.15 0.21	8.21 0.21	8.32 0.24	5.26 0.21	8.37 0.22	7.75 0.21	7.14 0.22	8.02 0.21
ϵ	$\pi\pi$	$\delta\delta$	$\eta\eta'$	$\sigma\sigma$	$\eta\eta$	$\eta'\eta'$	$\sigma\epsilon$	$\epsilon\epsilon$	$\eta'\eta'$	$\epsilon\sigma$
2.34 0.49	7.45 0.46	6.50 0.48	5.00 0.47	7.54 0.47	6.78 0.46	5.09 0.50	7.89 0.50	7.88 0.49	5.38 0.45	8.11 0.49
δ	$\delta\sigma$	$\delta\epsilon$	$\pi\eta$	$\pi\eta'$	$\sigma\delta$	$\epsilon\delta$	$\eta\pi$	$\eta'\pi$		
2.34 0.94	6.55 0.92	7.68 0.94	7.71 0.93	8.61 0.93	5.67 0.91	7.34 0.94	7.53 0.98	6.70 0.98		

Tab. 3: Parameter für die angepassten Kurven für 3-Mesonen-Formfaktoren, berechnet nach dem Graphen der Fig. 2.

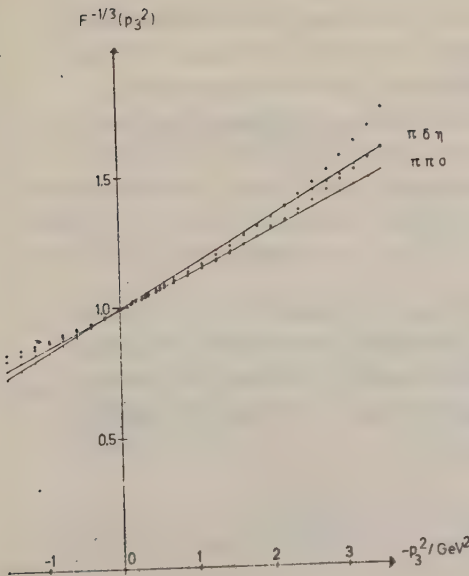


Fig.13: Darstellung des nach Fig.10c mit Ansatz (2.11a) berechneten 3-Mesonen-Formfaktors und der Ausgleichskurve

- a) für den $\pi\pi\sigma$ -Vertex
- b) für den $\pi\delta\eta$ -Vertex

Die Berechnung des Dreiecksdiagramms (Fig. 10c) ergibt für die Ansätze (2.11a) und (2.11b) den gleichen Formfaktor, da im Dreiecksdiagramm nur Nukleonen vorkommen. Während jedoch nach Ansatz (2.11a) eine p_3^2 -Abhängigkeit des berechneten Formfaktors erwartet wird, verlangt Ansatz (2.11b), daß der Formfaktor bezüglich p_3^2 konstant ist. Daher erfüllt Ansatz (2.11b) die Integralgleichung in der Dreiecksnäherung nach Fig. 10c nicht gut.

Zusammenfassend kann zu den Hadron-Hadron-Vertizes also folgendes gesagt werden: Der Ansatz (2.11a) erfüllt die für die Dreiecksnäherungen hergeleiteten Integralgleichungen im Bereich $-1 \text{ GeV}^2 \leq p_3^2 \leq 2 \text{ GeV}^2$ für die Meson-Nukleon-Vertizes gut, die für die 3-Meson-Vertizes dagegen weniger gut. Der nur hinsichtlich der Nukleonen symmetrische Ansatz (2.11b) ist in bezug auf die Integralgleichungen für die Vertizes nicht selbstkonsistent. Für ein Dreiecksdiagramm mit nur einem inneren Meson (Fig. 10a) erhält man eine besonders gute Erfüllung der Integralgleichung, wenn das innere Meson ein skalares Teilchen ist.

3.4. Vergleich der aus den Näherungsansätzen abgeleiteten Formfaktoren mit gebräuchlichen Formfaktoren

3.4.1. Hadron-Hadron-Vertizes

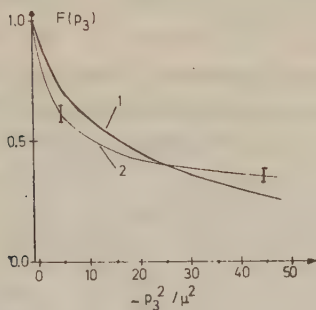
Für Hadron-Hadron-Vertizes wurde bisher noch keine direkte Bestimmung der Formfaktoren durchgeführt. FERRARI und SELLERI [41] haben in ihrer Arbeit die Abhängigkeit des Formfaktors für den Pion-Nukleon-Vertex vom Impuls des off-shell-Pions indirekt bestimmt. Sie versuchten, mit dem über Dispersionsrelationen und Pol-Dominanz abgeleiteten CLEMENTELL-VILLI-Formfaktor

$$\tilde{F}(p_3^2) = \frac{A-A}{1-\frac{p_3^2-\mu^2}{\alpha}} + A \quad (3.7)$$

die experimentellen Daten zu beschreiben und fanden für $\alpha = 4.73 \mu^2$ und $A = 0.28$ gute Übereinstimmung mit den Daten verschiedener Prozesse. Der Ansatz (3.7) geht für $A = 0$ in den Ansatz (3.3) über, der aus der Näherung (2.11a) für die Vertex-Funktion abgeleitet wurde. Für große

Werte von p_3^2 wird $\tilde{F}(p_3^2) = A$ konstant und zeigt damit die Eigenschaft eines Formfaktors für nicht-zusammengesetzte Hadronen. $A = 0$ dagegen bedeutet, daß das Nukleon zusammengesetzt ist.

In Fig. 14 sind die Werte für den Pion-Nukleon-Formfaktor für die Ansätze (3.3) und (3.7) dargestellt. Es ist zu erkennen, daß für



$\Lambda^2 = M_{31}^2 - M_3^2 \approx 17 \mu^2$ beide Ansätze in dem betrachteten p_3^2 -Bereich im Rahmen der von FERRARI und SELLERI abgeschätzten Unsicherheit sich nicht wesentlich unterscheiden. Die Beschreibung der Experimente mit einem Formfaktor nach Gl.(3.3) (bzw. Ansatz (2.11a)), der die Eigenschaft eines Formfaktors von zusammengesetzten Teilchen hat, wäre also möglich.

Fig.14: Vergleich der Pion-Nukleon-Formfaktoren nach Gl.(3.3) (Kurve 1) und von FERRARI und SELLERI (Kurve 2).

Die Werte der Parameter sind:

$$A = 0.28, \alpha = 4.73 \mu^2,$$

$$\Lambda^2 = M_{31}^2 - M_3^2 = 0.333 \text{ GeV}^2 \approx 17 \mu^2$$

(μ = Pion-Masse)

3.4.2. Photon-Hadron-Vertizes

Der elektromagnetische Nukleon-Formfaktor ist experimentell gut bekannt, die elektromagnetischen Meson-Formfaktoren dagegen weniger gut. Die elektrischen Formfaktoren des Protons haben die Form *)

$$F_1^p = \left(1 - \frac{\mu_p \tau}{1 - \tau}\right) G_p^e, \quad G_p^e = \frac{1}{\left(1 - \frac{p_3^2}{0.71 \text{ GeV}^2}\right)^2}, \quad \tau = \frac{p_3^2}{4M^2}$$

*) Es wird die Zerlegung

$$T^{\mu\nu}(p_1, p_2, p_3) \Big|_{\substack{p_1^2 = M_1^2 \\ p_2^2 = M_2^2}} = \delta^{\mu\nu} F_1(p_3^2) + i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{3\alpha} \frac{\mu_N}{M_1 M_2} F_2(p_3^2)$$

verwendet, wobei μ_N^1 das anomale magnetische Moment des Nukleons ist.

Für den Meson-Formfaktor, speziell für das Pion, wird üblicherweise die Abhängigkeit von p_3^2 angenommen, die aus dem VDM folgt:

$$F_{\pi}^V(p_3^2) = \frac{1}{1 - \frac{p_3^2}{m^2}}$$

wobei $m \approx m_{\rho}$ und m_{ρ} die Masse des ρ -Mesons ist.

Aus dem Näherungsansatz für die Vertex-Funktion ergibt sich, wie bereits in Abschnitt 2.4. beschrieben, der Ansatz des VDM.

Der aus dem Ansatz (2.11a) abgeleitete Meson-Formfaktor stimmt damit vom funktionalen Zusammenhang mit dem gebräuchlichen Formfaktor überein. Bei den Nukleon-Formfaktoren ist diese Übereinstimmung nicht so gut. Für $G_p^e(p_3^2)$ ist im Bereich $0 \leq -p_3^2 \leq 0.1 \text{ GeV}^2$ für $\Lambda^2 = M_{31}^2 - M_3^2 = m_{\rho}^2$ die Differenz zwischen den beiden Formfaktoren nicht größer als 11%, für $\Lambda^2 = 0.25 \text{ GeV}^2$ in dem viel größeren Bereich von $0 \leq -p_3^2 \leq 0.7 \text{ GeV}^2$ nicht größer als 8%; für $F_1^D(p_3^2)$ ist mit $\mu_p = 1.79$ im Bereich $0 \leq -p_3^2 \leq 0.1 \text{ GeV}^2$ für $\Lambda^2 = m_{\rho}^2$ diese Differenz nicht größer als 6%, für $\Lambda^2 = 0.35 \text{ GeV}^2$ in dem größeren Bereich $0 \leq -p_3^2 \leq 0.9 \text{ GeV}^2$ nicht größer als 5%. Ein Vergleich der Voraussagen des VDM, insbesondere des verallgemeinerten VDM [42], mit den experimentellen Nukleon-Formfaktoren ist auch bei SAKURAI [20] und den dort zitierten Referenzen zu finden.

4. Ein eichinvariantes Modell für die Photo- und Elektroproduktion eines Pions

4.1. Beschreibung des allgemeinen Modells

In diesem Abschnitt wird zunächst angegeben, wie aus einem allgemeinen Modell für den Pion-Nukleon-Vertex ein eichinvariantes Modell für die Pion-Photo- und Elektroproduktion abgeleitet werden kann. Dann wird gezeigt, wie bei Verwendung der Dreiecksnäherung für den Pion-Nukleon-Vertex und der in Abschn. 2.3. beschriebenen Näherungen für die Vertex-Funktionen die eichinvariante Pion-Photo- und Elektroproduktionsamplitude zu konstruieren ist.

Aus einem Modell für den Pion-Nukleon-Vertex kann die eichinvariante Amplitude für die Pion-Photo- und Elektroproduktion abgeleitet werden, indem das Photon an alle geladenen Linien des Pion-Nukleon-Vertex angekoppelt wird [37,38,43,44]. Im folgenden wird das für den Fall der π^+ -Photo- und Elektroproduktion durchgeführt.

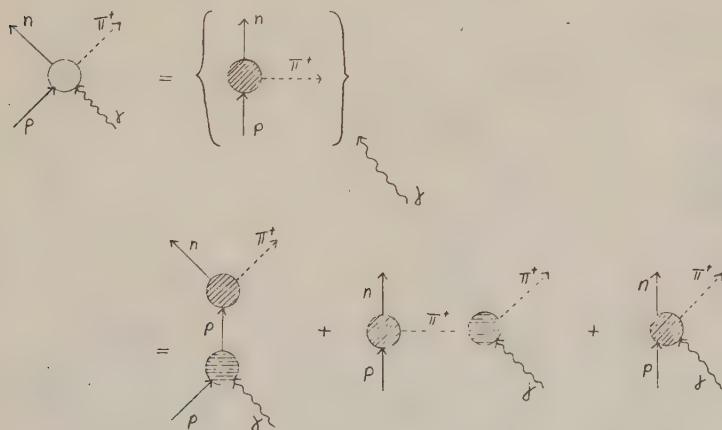


Fig. 15: Konstruktion einer eichinvarianten π^+ -Photo- und Elektroproduktionsamplitude aus dem π^+pn -Vertex

In Fig. 15 sind die drei verschiedenen Graphentypen dargestellt, die man nach diesem Verfahren für die π^+ -Photo- und Elektroproduktion erhält. Die ersten beiden Graphen entstehen durch Ankopplung des Photons an die geladenen Linien des Protons und des Pions. Der dritte Graph beschreibt symbolisch die Ankopplung des Photons an alle inneren geladenen Linien des Pion-Nukleon-Vertex. Bei den beiden ersten Graphen handelt es sich um 1-Teilchen-reduzible Graphen (s- und t-Kanal-Austausch), während der letzte Graph 1-Teilchen-irreduzibel ist. Die Photon-Hadron-Vertizes haben ebenfalls eine Struktur.

In Abschn. 2.1. wurde für Meson-Nukleon- und 3-Mesonen-Vertizes das Dreiecksdiagramm als Näherung zur Beschreibung der Wechselwirkung zusammengesetzter Hadronen eingeführt. Durch Ankopplung des Photons an alle geladenen Linien der Dreiecksgraphen vom Typ der Fig. 1a und 1b entstehen die in Fig. 16 dargestellten Graphen für die π^+ -Photo- und Elektroproduktion: *) die der Fig. 16a aus dem Graphen der Fig. 1a, die der Fig. 16b und 16c aus dem der Fig. 1b, für den es zwei Möglichkeiten für die Verteilung der Ladung im Dreiecksdiagramm gibt.

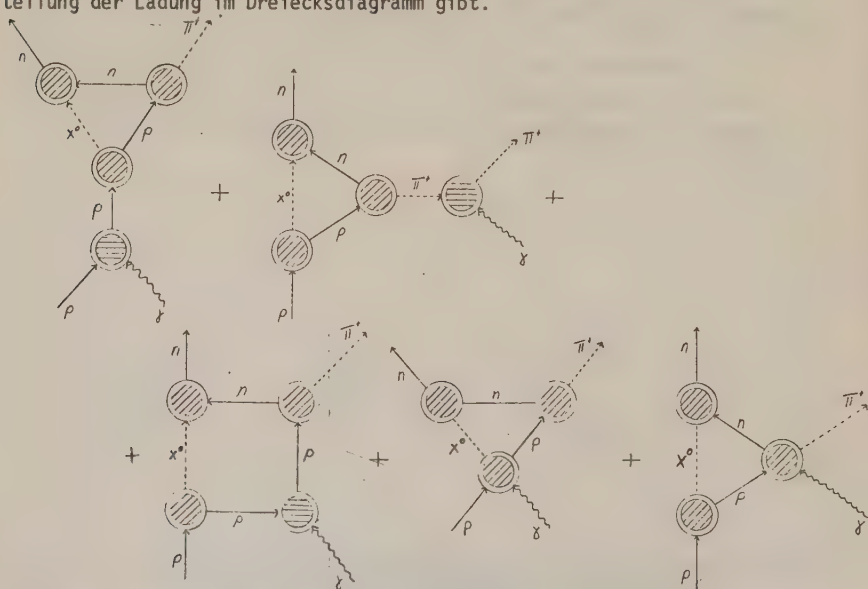


Fig. 16a: Graphen für die eichinvariante π^+ -Photo- und Elektroproduktionsamplitude, abgeleitet aus der Dreiecks-näherung für den π^+pn -Vertex der Fig. 1a

*) Die Anwendbarkeit dieser Methode auf die Modell-Vertizes wird am Ende dieses Abschnitts diskutiert.

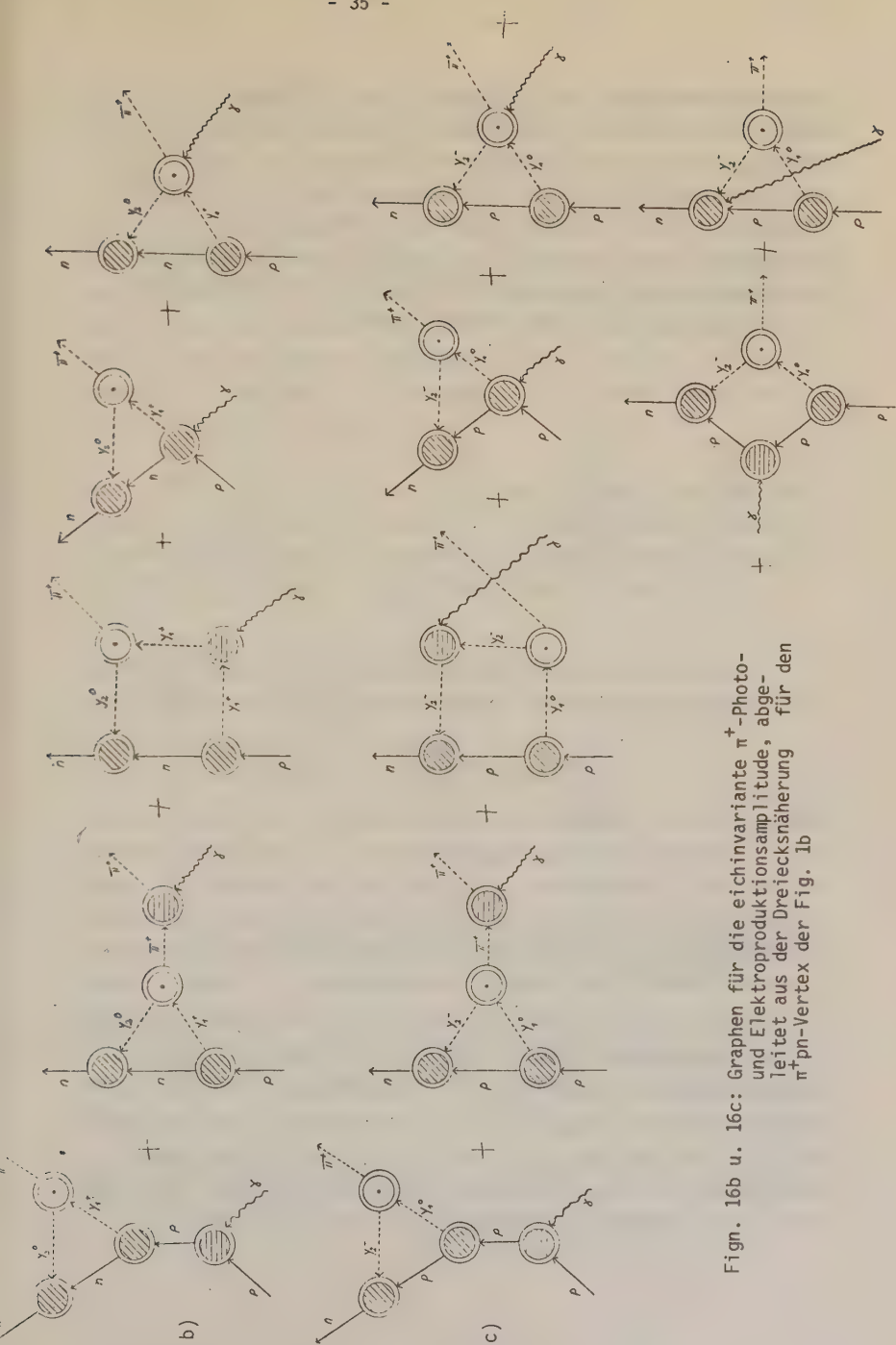


Fig. 16b u. 16c: Graphen für die eichinvariante π^+ -Photo- und Elektroproduktionsamplitude, abgeleitet aus der Dreiecksnäherung für den π^+pn -Vertex der Fig. 1b

Die direkte Ankopplung eines Photons an einen hadronischen Vertex beschreibt wieder symbolisch die Ankopplung an die inneren geladenen Linien des Vertex. Durch Verwendung der Näherungen der Fig. 5 für einen hadronischen Vertex ist es möglich, solche symbolischen Graphen aufzulösen und dafür explizite Graphen anzugeben. In Fig. 17 wird am Beispiel des $\pi^0 pp$ -Vertex gezeigt, wie das Photon an die hadronischen Vertizes anzukoppeln ist, wenn die Näherungen (2.11) des Abschnitts 2.3. für die Vertex-Funktionen verwendet werden.

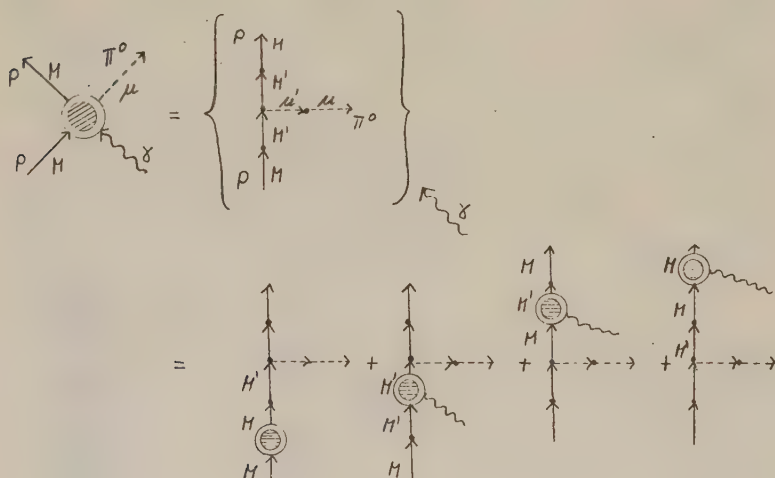


Fig.17: Ankopplung eines Photons an einen $\pi^0 pp$ -Vertex in der Näherung des Ansatzes (2.11a) mit nur einem Polterm pro Vertexlinie ($n_1 = n_2 = n_3 = 1$)

Es sei darauf hingewiesen, daß das Photon nach der Vorschrift "Ankopplung an alle geladenen Linien" sowohl an die Teilchenlinie mit der Masse M als auch an die Teilchenlinie mit der Masse M' beim ein- und auslaufenden Proton ankopple. Für den 3-Mesonen-Vertex gilt das gleiche Prinzip der Ankopplung. Für den in Fig. 17 auftretenden Photon-Nukleon-Vertex und die entsprechenden Photon-Meson-Vertizes werden die in Fig. 7 des Abschnitts 2.3. dargestellten Näherungen eingesetzt.

Die in den Referenzen [37,38,43,44] beschriebene Methode "Ankopplung des Photons an alle geladenen Linien eines Graphen" ist auch auf die vorkommenden Graphen anwendbar, die neben Vertizes mit drei Linien auch solche mit nur zwei Linien enthalten. Zwar wird üblicherweise unterstellt, daß nur Vertizes mit drei Linien auftreten, doch geht dies nicht explizit in die Beweisführung ein. Die einzige Voraussetzung, die benötigt wird, ist nämlich, daß die Photon-Hadron- und Photon-Lepton-Vertizes die Ward-Takahashi-Identität erfüllen. Diese Bedingung trifft aber für die verwendeten Photon-Hadron-Vertex-Funktionen zu (vgl. Abschn. 2.3); sie führt - lt. Konstruktion - zu freien Propagatoren in der Ward-Takahashi-Identität.

Daher ist jede der in den Fig. 17a, b und c dargestellten Summe von Graphen bei Verwendung der in Abschn. 2.3. beschriebenen Näherung für die Vertex-Funktionen und Anwendung des in Fig. 17 demonstrierten Prinzips der Ankopplung an die entsprechenden Vertizes für sich eichinvariant.

Das hier entwickelte eichinvariante Modell für die π^+ -Photo- und Elektroproduktion soll nun Ausgangspunkt weiterer Betrachtungen sein.

4.2. Form des Modells für praktische Rechnungen

Für die praktischen Rechnungen wurden zwei Vereinfachungen vorgenommen, um den Rechenaufwand in tragbaren Grenzen zu halten. Die bereits in Abschn. 3.1. beschriebene Änderung im Dreiecksdiagramm für die hadronischen Vertizes wird bei den Rechnungen zur Pion-Photo- und Elektroproduktion ebenfalls vorgenommen. Bei der Ableitung des eichinvarianten Modells nach der im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Methode wird daher anstatt von den Graphen der Fig. 1 und 2 von denen der Fig. 10 für den Pion-Nukleon- und 3-Mesonen-Vertex ausgegangen, bei der an einem Vertex des Dreiecksdiagramms eine Punktkopplung angenommen wird.

Eine weitere Änderung wurde bei den Graphen der Fig. 16c vorgenommen, die in Fig. 18 dargestellt sind.

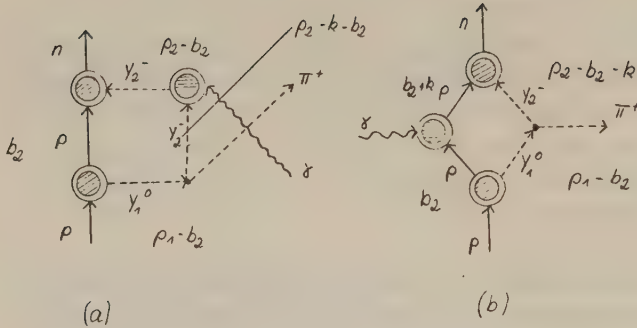


Fig. 18: Graphen, bei deren Integranden eine Polstelle in u bzw. t auftritt

Der Integrand des Matrixelementes dieser Graphen besitzt eine Polstelle in $u = (p_2 - k)^2$. Da für festes s u eine Funktion von t ist, wird das Ergebnis der Integration von t abhängig. Für jeden Punkt einer t -Darstellung der Wirkungsquerschnitte und Asymmetrien hätten daher die Integrationen ausgeführt werden müssen, was von der Rechenzeit her nicht durchführbar war, zumal sich diese beiden Graphen noch als physikalisch weniger wichtig erweisen werden. Deshalb wurde für diese beiden Diagramme die folgende Näherung als eichinvariante Ergänzung der ersten vier Graphen der Fig. 16c gewählt. Die beiden in Fig. 18 dargestellten Graphen entstehen durch Ankopplung des Photons an den Dreiecksgraphen der Fig. 10b mit zwei inneren Mesonen, wenn das Meson Y_2 negativ und Y_1 nicht geladen ist. Die beiden möglichen Ladungsanordnungen im Dreiecksdiagramm mit zwei inneren Mesonen sind in Fig. 19 zur Veranschaulichung abgebildet.

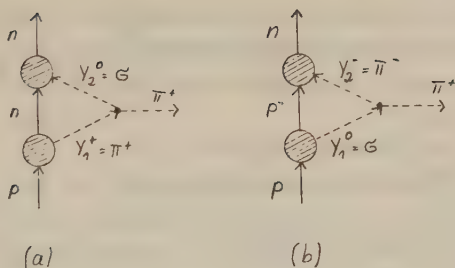


Fig. 19: Zwei mögliche Anordnungen der Ladung im Dreiecksdiagramm mit zwei inneren Mesonenlinien für den π^+pn -Vertex

Die beiden Graphen der Fig. 19 unterscheiden sich außer in der Ladungsanordnung aber auch noch in den den inneren Linien zugeordneten Massen; von den sieben Graphen der Fig. 16c unterscheiden sich vier von den entsprechenden Graphen der Fig. 16b nur durch eine andere Massen-anordnung, während die restlichen drei Graphen, darunter die beiden Graphen der Fig. 18, eine andere Struktur besitzen. Die eichinvariante Ergänzung des Beitrags der Fig. 16c zur Pion-Produktionsamplitude soll daher dadurch geschehen, daß der mittlere Graph der Fig. 16b, ein "Boxgraph", mit der Anordnung der Massen im Boxdiagramm nach Fig. 19b als Beitrag statt der drei restlichen Graphen der Fig. 16c genommen wird. Der Beitrag der Fig. 16c entspricht in dieser Näherung also dem Beitrag der Fig. 16b mit der gemäß der Fig. 19 geänderten Massen-anordnung im Dreiecksdiagramm.

4.3. Verhalten des Modells für hohe Energien

Vor den Berechnungen mit dem entwickelten Modell im Energiebereich um 2 GeV soll hier noch das Hochenergieverhalten der einzelnen Beiträge untersucht werden, um Anhaltspunkte für spezifische Merkmale der einzelnen Beiträge zu erhalten.

Dazu soll durch Vergleich der invarianten Amplituden des Graphen des Modells mit denen von t-Kanal- und s-Kanal-Austauschgraphen des BTM eine Einordnung vorgenommen werden.

Für $-t/s \ll 1$ findet man die folgende s-Abhängigkeit für die invarianten Amplituden der Pion-Photo- und Elektroproduktion.^{*)}

1. Boxgraph der Fig. 17a mit

1.1. einem skalaren oder pseudoskalaren Meson:

$$B_1, B_2, B_6, B_8 \propto \frac{\log s}{s}; \quad B_3, B_5' \propto \log s; \quad B_5'/B_6 \rightarrow -\frac{s}{2}$$

1.2. einem Vektor- oder Pseudovektormeson:

$$B_1, B_6, B_8 \propto \frac{\log s}{s}; \quad B_2, B_3, B_5' \propto \log s$$

2. t-Kanal-Austausch-Graph der Fig. 17a und Pion-t-Kanal-Austauschgraph des BTM:

$$B_1, B_2, B_5', B_6, B_8 = 0; \quad B_3 \propto s^0$$

3. Graphen der Fig. 17b und 17c mit zwei skalaren oder pseudoskalaren Mesonen:

$$B_1, B_2, B_6, B_8 \propto \frac{\log s}{s^2}; \quad B_5' \propto \frac{\log s}{s}; \quad B_3 \propto s^0 + \frac{\log s}{s}$$

4. eichinvariantes BTM mit Austausch eines pseudoskalaren Teilchens im t-Kanal:

$$B_1, B_2, B_6, B_8 \propto s^{-1}; \quad B_3, B_5' \propto s^0$$

5. BTM-Graph mit Vektormeson-Austausch im t-Kanal:

$$B_1, B_2, B_6, B_8 \propto s^0; \quad B_3, B_5' \propto s^{-1}; \quad B_5'/B_6 \rightarrow -\frac{s}{2}$$

Beim Vergleich des s-Verhaltens der unter Punkt 4. und 5. genannten Graphen mit punktförmigen Vertizes mit denen des Modells (Punkt 1.-3.) wird das Verhältnis der invarianten Amplituden eines Graphen zueinander benutzt. Gleiche Verhältnisse bedeuten dann gleiche relative Wichtigkeit der jeweiligen invarianten Amplituden für großes s. Man findet,

*) Die invarianten Amplituden der Pion-Photo- und Elektroproduktion werden in Anhang 4 definiert.

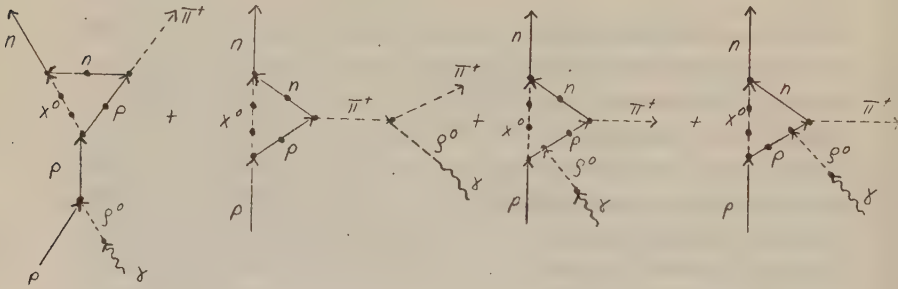
daß der Boxgraph mit skalaren und pseudoskalaren Mesonen die gleichen Verhältnisse bei den invarianten Amplituden zeigt wie der t-Kanal-Vektormeson-Austausch. Insbesondere gilt sogar $B_5'/B_6 \rightarrow -\frac{s}{2}$ für $s \rightarrow \infty$. Ebenso lassen sich die invarianten Amplituden der Graphen der Fign. 17b und 17c mit skalaren und pseudoskalaren Mesonen mit denen des eich-invarianten BTM vergleichen. Dagegen ist ein Vergleich der Boxgraphen mit Vektor- und Pseudovektormesonen mit keinem der aufgeführten OPE-Graphen möglich.

Es soll nun noch gezeigt werden, welche Unterschiede zwischen den Beiträgen des Boxgraphen der Fig. 17a mit einem skalaren und einem pseudoskalaren Meson bestehen. Bei großem s liefern die invarianten Amplituden B_3 und B_5' den Hauptbeitrag. Ihr Verhältnis $B_3/B_5' = \mu_N/4 M$ bei dem dem Boxgraphen vergleichbaren t-Kanal-Austauschgraphen ist proportional zum anomalen magnetischen Moment μ_N des Nukleons bezüglich der Ankopplung des Vektorteilchens. Die experimentellen Werte [45] für μ_N für das ρ -Meson liegen zwischen 2.5 und 6.5. Die numerischen Rechnungen ergeben für ein σ -Meson im Innern des Boxgraphen $\mu_N \approx 2$ und für ein Pion $\mu_N \approx -2$, so daß also der Boxgraph mit einem σ -Meson als realistisch anzusehen ist. Über den t-Abfall von B_3 und B_5' wurde ferner die Masse des äquivalenten t-Kanal-Vektorteilchens im Bereich $-t_{\min} \leq -t \leq 1 \text{ (GeV/c)}^2$ abgeschätzt; sie liegt zwischen 0.90 GeV und 1.15 GeV und somit in der Nähe der ρ -Masse (was hier allein für Vektormeson-t-Kanalaustausch in Frage kommt). Außerdem besitzt B_5' für ein σ -Meson im Boxdiagramm das gleiche Vorzeichen wie die entsprechende invariante Amplitude für ρ -Austausch im t-Kanal, während man für ein Pion das entgegengesetzte Vorzeichen erhält. Es zeigt sich also, daß das Boxdiagramm der Fig. 17a mit einem skalaren Meson für großes s einen physikalischen Bezug hat, während man es mit einem pseudoskalaren Meson nicht einordnen kann.

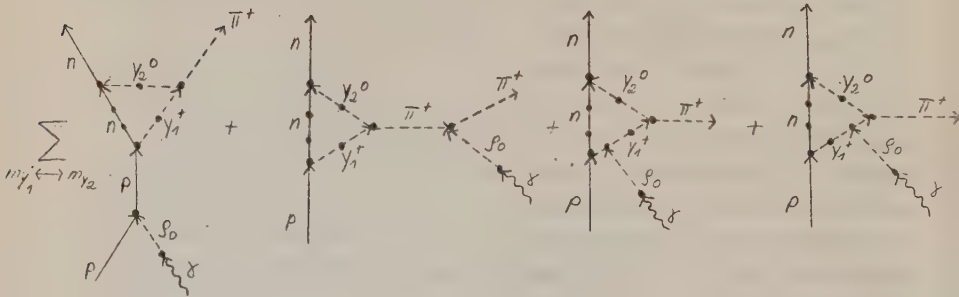
5. Rechnungen zur Pion-Photo- und Elektroproduktion

5.1. Überblick über die durchgeführten Rechnungen

Aus den beiden in Fig. 10a und 10b dargestellten Näherungen für den Pion-Nukleon-Vertex lassen sich nach der in Kapitel 4 beschriebenen Methode die in den Fign.20 und 21 angegebenen Beiträge zur Pion-Produktionsamplitude ableiten.



a)



b)

Fig. 20: Eichinvariante Beiträge zur Pion-Photo- und Elektroproduktionsamplitude nach Ansatz (2.11a)

a) Beitrag nach Fig. 10a

b) Beitrag nach Fig. 10b

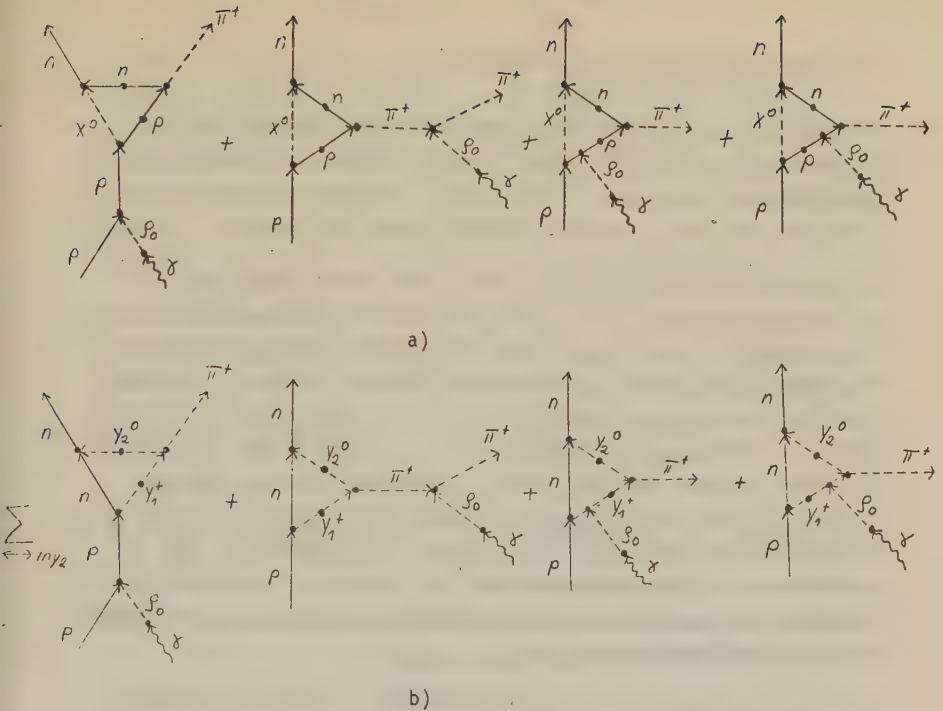


Fig. 21: Eichinvariante Beiträge zur Pion-Photo- und Elektroproduktionsamplitude nach Ansatz (2.11b)

a) Beitrag nach Fig. 10a

b) Beitrag nach Fig. 10b

In den Darstellungen wurde bereits berücksichtigt, daß das Proton, das Neutron und das Pion auf der Massenschale sind und daher bei diesen Linien für die Funktionen $r_i(p_i) \equiv 1$ gilt (vgl. die Beziehungen (2.11) bis (2.13) in Abschnitt 2.3.).

Ziel der Rechnungen ist es, die Abhängigkeit der Wirkungsquerschnitte und Asymmetrien der Pion-Photo- und Elektroproduktion vom Impulsübertrag t , dem Quadrat des Photonimpulses k^2 , für die verschiedenen Mesonen im Innern der Diagramme sowie bei Verwendung der beiden Ansätze für die Vertexfunktion zu untersuchen. Für die Graphen der Fig. 20 sind es die Mesonen π , η , η' ; σ , ε , δ , für die der Fig. 21a außerdem noch ρ (770 MeV) (hierzu werden der elektrische und der magnetische Beitrag berechnet),

$\omega(784 \text{ MeV})$, $\phi(1019 \text{ MeV})$, $A_1(1100 \text{ MeV})$.

Für die Massen M_{i1} in den Propagatoren der Vertex-Funktion wird die Beziehung $M_{i1}^2 = M_i^2 + \Lambda^2$ mit einer für alle Teilchen gleichen Konstanten Λ^2 verwendet. Es wird nur ein Polterm zur Approximation der Spektralverteilung der Vertex-Funktion benutzt, so daß hier generell $l = 1$ gilt.

Die Kopplungskonstanten für die 3-Meson-Vertizes werden über das Dreiecksdiagramm der Fig. 10c durch die Meson-Nukleon-Kopplungskonstanten ausgedrückt. Die im Modell zunächst als freie Parameter verfügbaren Meson-Nukleon-Kopplungskonstanten werden über den Pion-Nukleon-Vertex durch die Normierungsbedingung (2.13) für die Vertex-Funktion bestimmt, wobei als Beitrag zum Pion-Nukleon-Vertex nur jeweils das interessierende, zu den Graphen der Fig. 20 bzw. 21 gehörende Dreiecksdiagramm für den Pion-Nukleon-Vertex berücksichtigt wird. Man erhält dadurch eine Gleichung zur Bestimmung der Nukleon-Kopplungskonstanten für das innere Meson im Dreiecksdiagramm der Fig. 10a bzw. zur Bestimmung des Produktes der Nukleon-Kopplungskonstanten für die beiden inneren Mesonen im Dreiecksdiagramm der Fig. 10b.

Die Berechnung der verschiedenen Wirkungsquerschnitte und Asymmetrien geschieht folgendermaßen: Nach den in Anhang 7 angegebenen Beziehungen werden für die verschiedenen Graphen die Partialwellenentwicklungskoeffizienten berechnet und die zu einer eichinvarianten Amplitude gehörenden Entwicklungskoeffizienten entsprechend Fig. 20 und 21 addiert. Die Summe des Produkts aus Entwicklungskoeffizienten und $\mathcal{A}$ -Funktionen liefert dann als Ergebnis die Helizitätsamplituden, aus denen nach den in Anhang 1 angegebenen Beziehungen die Wirkungsquerschnitte und Asymmetrien der Pion-Photo- und Elektroproduktion berechnet werden.

5.2. Ein Algorithmus für die algebraische Berechnung von Helizitätsamplituden und Partialwellenentwicklungskoeffizienten für Teilchen mit Spin

Bei der Berechnung von Helizitätsamplituden für Teilchen mit Spin treten Ausdrücke auf, die Spinoren, γ -Matrizen, Polarisationsvektoren und Impulse enthalten. Ein solcher Ausdruck hat die allgemeine Form

$$\begin{aligned}
 T_{fi} &\equiv \bar{u}(p_f^{(1)}, s_f^{(1)}) T_A^{(1)}(p_i^{(1)}, p_f^{(1)}; q_1^{(1)}, \dots, q_{n1}^{(1)}) u(p_i^{(1)}, s_i^{(1)}) \cdot \\
 &\cdot \bar{u}(p_f^{(2)}, s_f^{(2)}) T^{(2)}(p_i^{(2)}, p_f^{(2)}; q_1^{(2)}, \dots, q_{n2}^{(2)}) u(p_i^{(2)}, s_i^{(2)}) \cdot \\
 &\vdots \\
 &\cdot \bar{u}(p_f^{(m)}, s_f^{(m)}) T^{(m)}(p_i^{(m)}, p_f^{(m)}; q_1^{(m)}, \dots, q_{nm}^{(m)}) u(p_i^{(m)}, s_i^{(m)})
 \end{aligned} \quad (5.1)$$

wobei die $T^{(k)}(p_i^{(k)}, p_f^{(k)}; q_1^{(k)}, \dots, q_{nk}^{(k)})$, $k = 1, \dots, m$

Linearkombinationen von $1, \gamma^\mu, \gamma^{\mu\nu}, \gamma^5$

mit den Impulsen $p_i^{(k)}, p_f^{(k)}, q_1^{(k)}, \dots, q_{nk}^{(k)}$

oder dem Polarisationsvektor $\epsilon(p, \lambda)$ vom Photon oder von Vektormesonen sein können.

Das übliche Verfahren zur Berechnung der Helizitätsamplituden besteht darin, diese für einen zahlenmäßig bekannten Satz von Helizitäten über die Matrixdarstellung für die Spinoren *)

$$\begin{aligned}
 u(p, 1/2) &= \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 + M} \\ \sqrt{p_0 - M} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \\
 u(p, -1/2) &= \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 + M} \\ -\sqrt{p_0 - M} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \sin \frac{\varphi}{2} \\ \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

und die γ -Matrizen durch Matrizenrechnung zu berechnen. Der Nachteil hierbei ist, daß man

1. für jeden Satz der numerisch vorzugebenden Helizitäten die ganze Rechnung durchführen muß und daß
2. schon bei nicht übermäßig komplizierten Matrixelementen sehr lange und unübersichtliche Endergebnisse entstehen können.

*) Für die Spinoren wurde die Phasenkonvention nach JACOB und WICK [46] gewählt.

Im folgenden wird daher ein Verfahren angegeben, bei dem die Helizitäten im Endergebnis als Parameter auftreten, so daß für verschiedene Sätze von Helizitäten insgesamt nur eine Rechnung durchgeführt werden muß und die winkelabhängigen Funktionen übersichtlich zusammengefaßt werden können. Dieses Verfahren bietet dazu den Vorteil, daß man mit wenigen Grundbausteinen, die für Spin 0-, Spin 1/2- und Spin 1-Teilchen angegeben werden, Matrixelemente für beliebige Kombinationen von Spinoren, Impulsen, Polarisationsvektoren und γ -Matrizen berechnen kann. Durch die Zurückführung beliebiger Ausdrücke auf bestimmte Standardausdrücke entsteht ein Algorithmus, der sich gut in einer nicht-numerischen, algebraischen Sprache, wie z.B. REDUCE [47], programmieren läßt. Damit ist es insbesondere möglich, die Helizitätsamplituden für Matrixelemente mit komplizierter Struktur maschinell zu berechnen.

Das Ziel, die Helizitäten noch als Parameter im Endergebnis zu haben, wird erreicht, indem man statt von der Darstellung (5.2) von der folgenden Darstellung für die Spinoren ausgeht: *)

$$u(p, s) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 + M} \\ 2s \sqrt{p_0 - M} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} D_{1/2, -s}^{1/2}(\varphi, \vartheta, -\varphi) \\ D_{1/2, -s}^{1/2}(\varphi, \vartheta, -\varphi) \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Aus den Beziehungen

$$D_{+1/2, +1/2}^{1/2}(\varphi, \vartheta, -\varphi) = D_{-1/2, -1/2}^{1/2}(\varphi, \vartheta, -\varphi) = \cos \frac{\vartheta}{2}$$

$$D_{+1/2, -1/2}^{1/2}(\varphi, \vartheta, -\varphi) = -D_{-1/2, +1/2}^{1/2}(\varphi, \vartheta, -\varphi) = e^{i\varphi} \sin \frac{\vartheta}{2}$$

sieht man, daß die Darstellung (5.3) zu der Darstellung (5.2) äquivalent ist und man bei (5.3) keine Fallunterscheidung bzgl. der Helizitäten machen muß. Die (5.3) entsprechende Darstellung für die Antiteilchen ist in Anhang 3 angegeben.

Für das Produkt aus einem Impuls oder einem Polarisationsvektor und γ -Matrizen ("slash"-Größe) ist die (5.3) entsprechende Darstellung

*) Die Definition der D -Funktionen wird in Anhang 1 gegeben. Die dort benutzte Definition findet man bei EDMONDS [48], SZEGÖ [49] und ERDELYI [50].

$$= \rho_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes 1 - |\vec{p}| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{00}'(\varphi, \vartheta, -\varphi) - \sqrt{2} \mathcal{D}_{10}'(\varphi, \vartheta, -\varphi) \\ \sqrt{2} \mathcal{D}_{10}'(\varphi, \vartheta, -\varphi) - \mathcal{D}_{00}'(\varphi, \vartheta, -\varphi) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

denn es gilt:

$$\mathcal{D}_{00}'(\varphi, \vartheta, -\varphi) = \cos \vartheta$$

$$\mathcal{D}_{10}'(\varphi, \vartheta, -\varphi) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2} e^{\pm i\varphi} \sin \vartheta$$

Für umfangreiche Ausdrücke, bestehend aus Spinoren und slash-Größen, ist die Darstellung (5.4) für slash-Größen unbequem, da sie aus zwei verschiedenartigen Termen besteht und bei mehrfachem Vorkommen von slash-Größen die Anzahl der in den Zwischenrechnungen explizit auftretenden Summanden anwächst.

Ein Ansatzpunkt für eine bequemere Darstellung von $\not{p}$ ergibt sich durch die Beziehung (5.5), die für $p^2 = M^2$ gilt:

$$\not{p} + M = \sum_{s=\pm 1/2} u(p, s) \bar{u}(p, s) \quad (5.5)$$

Die in Gl. (5.5) auftretende Summe über die Helizitäten kann jetzt mit Hilfe von Gl. (5.3) ausgedrückt werden. Bei einem Produkt mehrerer Größen der Art (5.5) erhält man dann explizit nur ein Produkt, aber keine expliziten mehrfachen Terme. Die notwendigen Umformungen brauchen daher nur an einem einzigen Term (abhängig von allgemeinen Parametern) ausgeführt zu werden, wodurch die Rechnung übersichtlicher wird.

Durch Anwendung von (5.3) und (5.5) kann man dann z.B. den Ausdruck berechnen:

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2, s_2) (\not{p} + M) u(p_1, s_1) \\ &= \left[(\not{p}_0 + M) \sqrt{(\not{p}_{20} + M_2)(\not{p}_{10} + M_1)} + (\not{p}_0 - M) 4 s_1 s_2 \sqrt{(\not{p}_{20} - M_2)(\not{p}_{10} - M_1)} \right] \mathcal{D}_{-s_1, -s_2}^{1/2*}(\varphi_2, \vartheta_2, -\varphi_2) \\ & \quad - \sqrt{\rho_0^2 - M^2} \left[2 s_1 \sqrt{(\not{p}_{20} + M_2)(\not{p}_{10} - M_1)} + 2 s_2 \sqrt{(\not{p}_{20} - M_2)(\not{p}_{10} + M_1)} \right] \cdot \\ & \quad \cdot \left[\mathcal{D}_{-s_1, -s_2}^{1/2*}(\varphi_2, \vartheta_2, -\varphi_2) + \sqrt{2} 2 s_1 \mathcal{D}_{s_1, -s_2}^{1/2*}(\varphi_2, \vartheta_2, -\varphi_2) \mathcal{D}_{-2s_1, 0}^{1*}(\varphi_1, \vartheta_1, -\varphi_1) \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

wobei das Koordinatensystem so gelegt wurde, daß $\varphi_1 = \varphi_1 = 0$ gilt. Durch Einsetzen von numerischen Werten für die Helizitäten in (5.6) erhält man die bisher übliche Form des Ergebnisses

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2, 1/2) (\not{p} + M) u(p_1, 1/2) = \\ & \left[(p_0 + M) \sqrt{(p_{20} + M_2)(p_{10} + M_1)} + (p_0 - M) \sqrt{(p_{20} - M_2)(p_{10} - M_1)} \right] \cos \frac{\varphi_2}{2} \\ & - \sqrt{p_0^2 - M^2} \left[\sqrt{(p_{20} + M_2)(p_{10} - M_1)} + \sqrt{(p_{20} - M_2)(p_{10} + M_1)} \right] \cdot \left(\cos \frac{\varphi_2}{2} - \sin \frac{\varphi_2}{2} \sin \varphi_2 \right) \end{aligned} \quad (5.7a)$$

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2, 1/2) (\not{p} + M) u(p_1, -1/2) = \\ & \left[(p_0 + M) \sqrt{(p_{20} + M_2)(p_{10} + M_1)} - (p_0 - M) \sqrt{(p_{20} - M_2)(p_{10} - M_1)} \right] \sin \frac{\varphi_2}{2} e^{-i\varphi_2} \\ & - \sqrt{p_0^2 - M^2} \left[-\sqrt{(p_{20} + M_2)(p_{10} - M_1)} + \sqrt{(p_{20} - M_2)(p_{10} + M_1)} \right] \cdot \\ & \left(\sin \frac{\varphi_2}{2} + \cos \frac{\varphi_2}{2} \sin \varphi_2 \right) e^{-i\varphi_2} \end{aligned} \quad (5.7b)$$

Man sieht also, daß man durch Anwendung der beschriebenen formalen Methode der Berechnung ein kompakteres Ergebnis erhält als nach der bisher üblichen Rechenmethode, ganz abgesehen von den bei den Zwischenrechnungen durch Anwendung weiterer formaler Rechenoperationen möglichen Vereinfachungen und dem Vorteil, die Rechnung nur einmal durchführen zu müssen.

Die in Gl. (5.5) angegebene Beziehung hat zunächst noch den Nachteil, daß sie auf den Fall $p^2 = M^2$ beschränkt ist und nur dann angewendet werden kann, wenn das Teilchen mit dem Impuls p auf der Massenschale ist und $\not{p}$ in Verbindung mit der Masse M vorkommt. Eine Anwendung der Beziehung (5.5) auf Fälle, für die $p^2 \neq M^2$ gilt, wird durch das von GUTBROD und SIMON angegebene "off-shell"-Verfahren [25] ermöglicht. Bei diesem Verfahren wird der Ausdruck $\not{p} + M$ für $p^2 \neq M^2$ durch eine

Linearkombination von $\not{p}_1 + M_1$ und $\not{p}_2 + M$ ersetzt:

$$\begin{aligned}\not{p} + M &= \mathcal{L}_1 (\not{p}_1 + M_1) + \mathcal{L}_2 (\not{p}_2 + M) \\ &= \sum_{i=1}^2 \mathcal{L}_i (\not{p}_i + M_i)\end{aligned}\quad (5.8)$$

Die beiden Impulse p_1 und p_2 sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}\vec{p}_1 &= \vec{p}_2 = \vec{p} \\ p_{10} &= -p_{20} = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2}\end{aligned}\quad (5.9)$$

Aus den in (5.9) angegebenen Beziehungen folgt dann:

$$\begin{aligned}p_1^2 &= M^2 \\ p_2^2 &= M^2\end{aligned}$$

so daß für die Ausdrücke $\not{p}_1 + M$ und $\not{p}_2 + M$ die Beziehung (5.5) verwendet werden kann. Für die Koeffizienten α_i muß gelten:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p_0}{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}} \right) \quad (5.10)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p_0}{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}} \right)$$

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p_i}{p_{i0}} \right) \quad (5.10a)$$

Aus der Beziehung (5.8) folgt dann als Verallgemeinerung von (5.5)

$$\not{p} + M = \sum_{i=1}^2 \mathcal{L}_i \sum_{s=\pm 1/2} u(\rho_i, s) \bar{u}(\rho_i, s) \quad (5.11)$$

Damit ist es möglich, jede Kombination von Spinoren und Produkten von Impulsen und γ -Matrizen formal zu berechnen, so daß das Endergebnis übersichtlich wird und die Helizitäten dort noch als Parameter auftreten. Bei allen Rechnungen kommt man mit neun Standardausdrücken aus. Diese sind in Anhang 3 angegeben; es wurden dabei auch die Fälle mit einbezogen, bei denen Polarisationsvektoren und γ_5 -Matrizen vorkommen.

Mit dem beschriebenen Verfahren können nicht nur Helizitätsamplituden, sondern auch Partialwellenentwicklungskoeffizienten in geschlossener Form berechnet werden. Nach JACOB und WICK läßt sich jede Helizitätsamplitude mit zwei ein- und auslaufenden Teilchen mit den Helizitäten $s_1^i, s_2^i; s_1^f, s_2^f$ im Schwerpunkt-System (CMS) dieser Teilchen darstellen in der Form

$$T_{fi}(s_1^i, s_2^i, s_1^f, s_2^f) = \sum_J (2J+1) a_J^{s_1^i, s_2^i, s_1^f, s_2^f} \mathcal{D}_{s_1^i - s_2^i, s_1^f - s_2^f}^{J*}(\varphi, \varphi' - \varphi) \quad (5.12)$$

Treten im Matrixelement Propagatoren mit winkelabhängigen Ausdrücken auf, kann ein solcher Propagator stets in die Form $\frac{C}{Z-x}$ gebracht werden (vgl. dazu auch Gleichung (3.1) in Abschnitt 3.1.), wobei $x = \cos\theta$ gilt. Der Ausdruck $\frac{1}{Z-x}$ kann nach LEGENDRE-Polynomen $P_l(x)$ entwickelt werden:

$$\frac{1}{Z-x} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) Q_l(Z) P_l(x) \quad (3.2a)$$

Da $P_l(x) \equiv \mathcal{D}_{00}^l(\varphi', \varphi' - \varphi')$

ist, kann nach Anwendung des Additionstheorems zur Substitution von

$$\mathcal{D}_{m'm}^J(\varphi', \varphi' - \varphi') \quad \text{durch} \quad \mathcal{D}_{m'm}^J(\varphi, \varphi' - \varphi)$$

und durch Zusammenkoppeln aller $\mathcal{D}$ -Funktionen nach den in Anhang 1 angegebenen Beziehungen das Produkt dieser $\mathcal{D}$ -Funktionen durch eine Linearkombination von $\mathcal{D}_{s_1^i, s_2^i, s_1^f, s_2^f}^{J*}(\varphi, \varphi' - \varphi)$

ausgedrückt werden, so daß durch Vergleich des aus dem Matrixelement nach der beschriebenen Methode berechneten Ergebnisses mit der allgemeinen Entwicklung (5.12) die Partialwellenentwicklungskoeffizienten $a_J^{s_1^i, s_2^i, s_1^f, s_2^f}$ bestimmt werden können.

Zur Demonstration des Verfahrens werden in Anhang 4 die Helizitätsamplituden und Partialwellenentwicklungskoeffizienten für die Pion-Photo- und Elektroproduktion für das BTM in der geschlossenen Form angegeben, die nach dem beschriebenen Verfahren berechnet wurden und die bisher nur numerisch berechnet worden sind.

Dazu wurde von der Darstellung des Matrixelementes durch invariante Amplituden ausgegangen und die vorkommenden Produkte von Spinoren und slash-Größen mit Hilfe des off-shell-Verfahrens und der in Anhang 3 angegebenen Standardausdrücke sowie dann die Helizitätsamplitude berechnet. Zur Bestimmung der Partialwellenentwicklungskoeffizienten wurden die Definitionen für die invarianten Amplituden verwendet, die winkelabhängigen Propagatoren nach LEGENDRE-Polynomen entwickelt und die Produkte der $\mathcal{D}$ -Funktionen durch Linearkombinationen von $\mathcal{D}_{s_1-\lambda, s_2}^J(\varphi, \vartheta, -\varphi)$ ausgedrückt. Durch Koeffizientenvergleich konnten dann die Entwicklungskoeffizienten bestimmt werden.

5.3. Numerische Rechenmethoden

Zur numerischen Berechnung der verschiedenen Größen wie der Formfaktoren für die hadronischen Vertizes oder der Wirkungsquerschnitte und Asymmetrien der Pion-Photo- und Elektroproduktion wurde ein FORTRAN-Programm geschrieben, dessen vereinfachtes Flußdiagramm in Anhang 5 wiedergegeben ist.

Bei der Erstellung dieses Programms kam der bei der numerischen Integration verwendeten Methode große Bedeutung zu. Wichtig war die Wahl der Gewichtsfunktionen für die numerische Integration und die Konvergenzabfrage bei der Reihenberechnung zum Erzielen einer ausreichenden Genauigkeit.

Die Überprüfung des Programms erforderte bei der Komplexität der zu programmierenden Ausdrücke (vgl. Anhang 6 und 7) besondere Aufmerksamkeit. Es wurden zwei verschiedene Methoden zum Testen der Programme verwendet. Bei den mathematischen Programmen konnten zur Kontrolle Tabellen benutzt werden, sofern die Funktionen tabelliert waren, wie beispielsweise die LEGENDRE-Funktionen 1. und 2. Art. Bei anderen Funktionen, wie z.B. den $\mathcal{D}$ -Funktionen, die nicht tabelliert sind, wurden zwei verschiedene, voneinander unabhängige Programmversionen gegeneinander getestet. Bei physikalischen Programmteilen wurden für die kritischsten von ihnen die Ergebnisse von zwei voneinander unabhängigen Versionen ebenfalls miteinander verglichen.

Für die numerischen Integrationen wurde ein von GUTBROD [51] entwickeltes Verfahren verwendet, das eine Verallgemeinerung des GAUSS'schen Verfahrens [52] auf Integranden mit singulären Stellen ist.

Bei der Ausführung der numerischen Integration findet man die folgende Situation vor: Nach der analytischen Integration über die Winkel, die nach Entwicklung der winkelabhängigen Propagatoren nach LEGENDRE-Polynomen möglich ist, sind noch die Integrationen über die Energiekomponente und den Betrag des räumlichen Impulses durchzuführen. Dabei tritt das folgende Problem auf: Die Propagatoren im Integranden besitzen den Imaginärteil $i\epsilon$, der angibt, wie der Integrationsweg zur Umgehung der Polstellen der Propagatoren gewählt werden muß. Die Schwierigkeit bei der Ausführung der Integration besteht nun darin, daß die Lage der Polstellen bzgl. b_{20} von den anderen Integrationsvariablen abhängt. In Fig. 22 ist die Lage der Pole in der komplexen b_{20} -Ebene für die beiden vorkommenden Integraltypen (5.13) angegeben.

$$\int d^4 b_2 \frac{f(b_2)}{b_2^2 - \mu_2^2 + i\epsilon} \cdot \frac{1}{(p_1 - b_2)^2 - H_1^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p_2 - b_2)^2 - H_3^2 + i\epsilon} \quad (5.13a)$$

$$\int d^4 b_2 \frac{f(b_2)}{b_2^2 - \mu_2^2 + i\epsilon} \frac{1}{(w - b_2)^2 - H_1^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p_1 - b_2)^2 - H_1^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p_2 - b_2)^2 - H_3^2 + i\epsilon} \quad (5.13b)$$

Mit b_{20} wird hierbei die Energiekomponente, mit $\vec{b}_2$ der räumliche Impuls der Integrationsvariablen b_2 und mit $w = p_1 + k$ der Schwerpunktsimpuls bezeichnet. p_1 und k sind die Impulse des einlaufenden Protons und des Photons.

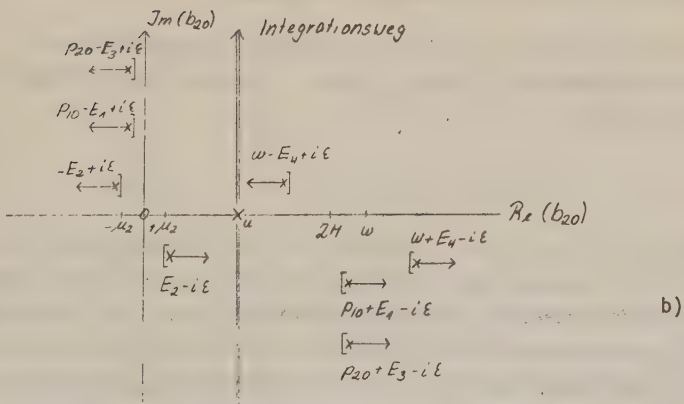
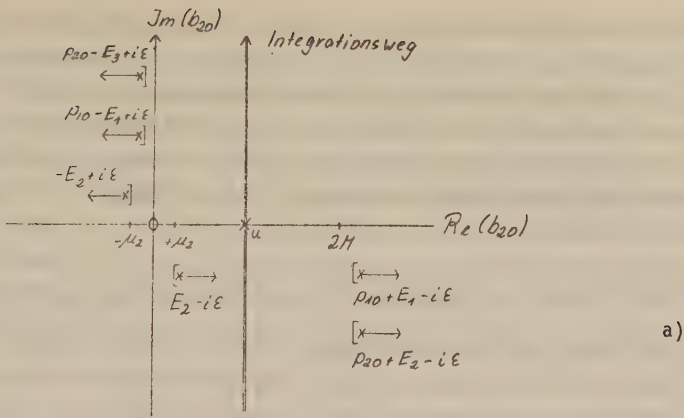


Fig. 22: Polstellen und Integrationsweg in der komplexen b_{20} -Ebene

a) für den Integranden der
Gl. (5.13a)

b) für den Integranden der
Gl. (5.13b)

$$E_1 = \sqrt{M_1^2 + (\tilde{p}_1 - \tilde{b}_2)^2} \geq M_1$$

$$E_3 = \sqrt{M_3^2 + (\tilde{p}_2 - \tilde{b}_2)^2} \geq M_3$$

$$E_2 = \sqrt{\mu_2^2 + \tilde{b}_2^2} \geq \mu_2$$

$$E_4 = \sqrt{M_1^2 + \tilde{b}_2^2} \geq M_1$$

$$\tilde{\omega} = 0$$

Üblich ist eine Drehung des Integrationsweges, die als WICK-Rotation bezeichnet wird, aus der reellen Achse der komplexen b_{20} -Ebene heraus um 90° , so daß nach der Drehung der Integrationsweg parallel zur imaginären Achse verläuft. Der Drehpunkt u dieser WICK-Rotation wird im Programm so gewählt, daß möglichst wenig Pole den neuen Integrationsweg kreuzen oder dicht an ihn herankommen; für u wird daher die folgende Beziehung benutzt:

$$u = \frac{1}{2} \left[\text{Max} (\rho_{10} - E_1, \rho_{20} - E_3) + \text{Min} (\rho_{10} + E_1, \rho_{20} + E_3) \right] \quad (5.14)$$

Da bei der Drehung des Integrationsweges evtl. Polstellen - je nach ihrer Lage - überstrichen werden, müssen dann die Residuen dieser Pole wieder abgezogen werden. Außerdem sind für den Fall, daß ein Pol durch den Integrationsweg wandert, Vorkehrungen zu treffen, um ein zu starkes Anwachsen des numerischen Integranden zu verhindern. Dazu wurden von GUTBROD [54] spezielle Techniken übernommen.

Die Gewichtsfunktionen $w(x)$ für die numerische Integration über b_2 (Betrag des Impulses $\vec{b}_2$) und b_{20} wurden - ebenfalls nach GUTBROD [54] - so gewählt, daß in

$$\int dx w(x) f(x) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (5.15)$$

das Verhältnis $f(x_i)/w_i$ (w_i = Gewichte) für alle Stützstellen x_i annähernd gleich war und nicht stark von einem mittleren Wert abwich. Durch Variation der Anzahl der Stützstellen wurde die Genauigkeit der numerischen Integration kontrolliert. Die Anzahl der Stützstellen wurde so gewählt, daß beispielsweise die Amplitude der Fig. 21a mit skalaren und pseudoskalaren Mesonen eine Genauigkeit von mindestens 3% aufwies.

Bei der Berechnung der Reihen wird die Erfüllung von drei verschiedenen Genauigkeitskriterien gefordert, bevor die Reihenberechnung abgebrochen wird. Das erste Kriterium ist, daß mindestens die letzten vier Summanden einer Reihe monoton abnehmen müssen. Diese Forderung erweist sich als notwendig, da, bedingt durch den Spin der Teilchen, die ersten Glieder einer Reihe sehr stark in ihrer Größe schwanken können. Weiter muß der Absolutbetrag des Verhältnisses der Differenz zwischen alter und neuer

Partialsumme zur neuen Partialsumme unter einer vorgegebenen Grenze ε für die relative Genauigkeit liegen. Dieses Kriterium ist das übliche bei numerischer Berechnung von unendlichen Reihen. Schließlich wird das Restglied für die Absolutbeträge der Summanden aus der Stärke der monotonen Abnahme der letzten vier Summanden durch Extrapolation abgeschätzt. Es wird gefordert, daß der Absolutbetrag des Verhältnisses Restglied zur neuen Partialsumme plus Restglied ebenfalls kleiner sein muß als ε . Durch diese Forderung wird die Gleichmäßigkeit der geforderten Genauigkeit in dem in Frage kommenden Funktionswertebereich zwischen -1 und 1 bzw. zwischen 0^0 und 180^0 sichergestellt.

6. Ergebnisse für die Pion-Photo- und Elektroproduktion

6.1. Beschreibung der Daten im Energiebereich um 2 GeV durch das BTM

Als Ausgangspunkt der Diskussion soll hier die Situation beim BTM zusammengefaßt werden.

In der π^+ -Photoproduktion liegen bisher experimentelle Daten für den Wirkungsquerschnitt σ_U für unpolarisierte Photonen und Nukleonen sowie für die Asymmetrien für linear polarisierte Photonen (Σ) und Nukleonen (T) vor.

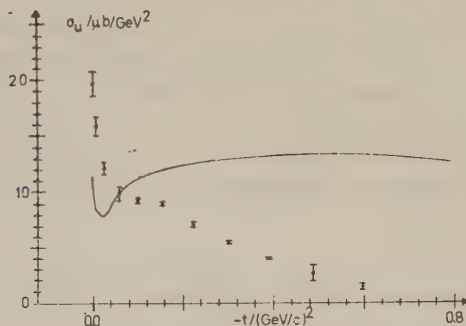


Fig. 23: t -Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts σ_U im BTM mit s - und t -Kanal-Austausch für die π^+ -Photoproduktion *)

Aus Fig. 23 sieht man, daß das BTM in Vorwärtsrichtung nur für einen sehr kleinen t -Bereich bis $t = -\mu^2$ die t -Abhängigkeit von σ_U beschreiben kann. Die Kurve für die aus dem BTM berechnete Photonasymmetrie Σ ist in Fig. 24 dargestellt. Man erkennt, daß das BTM in Vorwärtsrichtung wieder, wie bei σ_U , mit den Daten übereinstimmt, für $-t \geq 0.08 \text{ (GeV/c}^2\text{)}$ verläuft jedoch die theoretische Kurve über der experimentellen. Die Targetasymmetrie T dagegen kann durch das BTM überhaupt nicht beschrieben werden, da die Pion-Produktionsamplitude im BTM rein reell und somit die Targetasymmetrie T , die proportional zum Imaginärteil der Produkte von je zwei Amplituden ist, identisch Null ist.

*) Die experimentellen Daten für σ_U wurden der Ref. [11] entnommen.

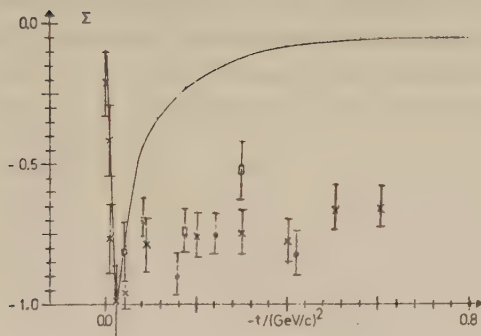


Fig. 24: t -Abhängigkeit der Asymmetrie für linear polarisierte Photonen im BTM für die π^+ -Photoproduktion

x DESY 3.4 GeV [12]

• CEA 3.0 GeV [13]

□ SLAC 12 GeV [14]

In der Elektroproduktion wurden bisher $\sigma_U + \epsilon\sigma_S$, σ_T und σ_L experimentell für den Energiebereich um 2 GeV bestimmt [8]. Man findet eine ähnliche Situation wie in der Pion-Photoproduktion vor. Auch hier können s - und t -Kanal-Austausch die experimentellen Daten für die Summe $\sigma_U + \epsilon\sigma_S$ der Wirkungsquerschnitte für (linear) unpolarisierte (σ_U) und longitudinal (σ_S) polarisierte Photonen nur teilweise erklären, wie aus Fig. 25 zu sehen ist.

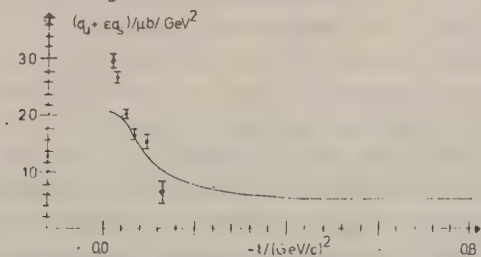


Fig. 25: t -Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes $\sigma_U + \epsilon\sigma_S$ für das BTM für die π^+ -Elektroproduktion *) ($k^2 = -.55 \text{ GeV}^2$)

*) Die experimentellen Werte für die π^+ -Elektroproduktion für $k^2 = -.26, -.55, -.75 \text{ GeV}^2$ wurden der Ref. [8b] entnommen.

Der Interferenzterm für Amplituden mit transversal (σ_T) polarisierten Photonen wird durch das BTM ebenfalls nicht gut beschrieben, derjenige für transversal und longitudinal polarisierte Photonen (σ_I) überhaupt nicht (Fig. 26).

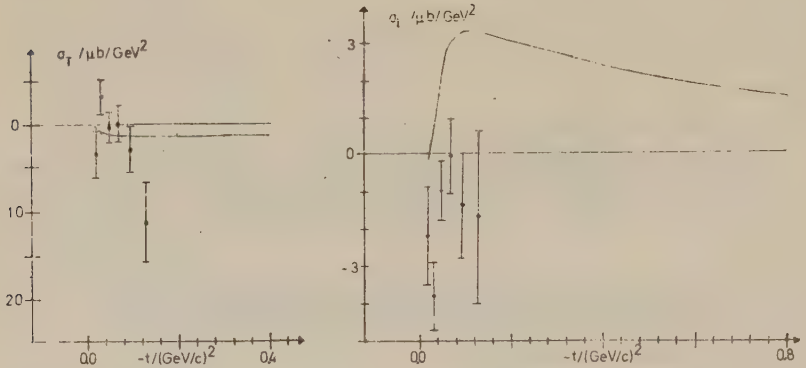


Fig. 26: t -Abhängigkeit der Wirkungsquerschnitte σ_T und σ_I durch das BTM für die π^+ -Elektroproduktion ($k^2 = -0.55 \text{ GeV}^2$)

6.2. Beschreibung der Daten im Energiebereich um 2 GeV durch das entwickelte Modell

6.2.1. Photoproduktion

In Fig. 27 sind die Kurven für das BTM und für die Graphen der Diagramme mit nur einem inneren Meson und mit Ansatz (2.11b) nach Fig. 21a für π , σ , ρ und A_1 als inneren Mesonen dargestellt. Da die Wirkungsquerschnitte für die verschiedenen betrachteten Fälle sich teilweise erheblich unterscheiden, wird bei der Darstellung der Kurven für die Wirkungsquerschnitte eine Normierung vorgenommen. Dadurch wird ein besserer Vergleich hinsichtlich der t -Abhängigkeit der verschiedenen Fälle möglich. Die Konstanten, mit denen die Kurven zu multiplizieren sind, sind jeweils in der Bildunterschrift angegeben. Die Kurven für ρ und A_1 weisen keine gute Übereinstimmung mit den Daten auf und ihre Beiträge liegen um 2-3 Größenordnungen über den experimentellen Werten. Das Pion zeigt ein ähnliches Verhalten wie das BTM. Das skalare

Meson σ bzw. ein skalares Teilchen $0^+(m_\pi)$ mit der Masse des Pions zeichnen das beste t -Verhalten von allen erwähnten Mesonen. Bei ihnen ist sowohl der Vorwärtsspit am stärksten ausgeprägt als auch der t -Abfall am besten unter den Beiträgen mit der richtigen Größenordnung. Aus den Werten für $g_{\rho NN}$ bzw. für $\mu_N \cdot g_{\rho NN}$ der Kurven 2 und 3 erhält man für $|\mu_N| \approx 2$.

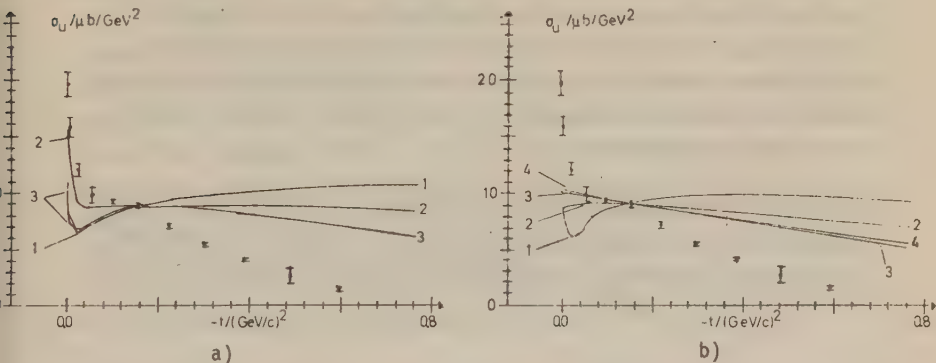


Fig. 27: t -Abhängigkeit von σ_U (normiert) für die π^+ -Photo-
produktion für die Graphen der Fig. 22a mit ver-
schieden Mesonen

$(\Lambda = 1.3 \text{ GeV})$		NF (Normierungsfaktor)		Meson-Nukleon- Kopplungskonstante g *)
a)	1 π		3.26	25.5
	2 σ		1.98	14.0
	3 $0^+(m_\pi)$		1.23	9.29
b)	1 BTM			-
	2 ρ (elektrisch)	36.5		6.76
	3 ρ (magnetisch)	88.2		$g \cdot \mu_N = 13.6$
	4 A_1	3202		9.89

Es wird nun weiter untersucht, ob durch Interferenz von je zwei der verschiedenen in Fig. 27 angegebenen Beiträge eine bessere Übereinstimmung mit dem Experiment erreicht werden kann. Die Rechnungen zeigen, daß zwischen Beiträgen mit Mesonen mit verschiedenen Spin und verschiedener Parität keine gleichzeitige destruktive Interferenz der niedrigen Partialwellen möglich ist. Ein der Absorption ähnliches Verhalten kann des-

*) Berechnet nach der in Abschn. 5.1. beschriebenen Methode.

halb nicht auftreten. Wegen der inneren Schleifen in den Diagrammen der Fig. 20a und 21a ergibt sich aber eine andere Möglichkeit für die Interferenz zwischen je zwei Beiträgen, wenn man als innere Mesonen solche mit gleichem Spin und gleicher Parität, aber verschiedenen Isospin und verschiedener Masse verwendet. Die Beiträge dieser Graphen mit einem inneren Isospin 1-Meson unterscheiden sich nämlich durch das Vorzeichen von denen eines Isospin 0-Teilchens. Dadurch kann diese Interferenz wie Absorption wirken. Die Partialwellen für Mesonen mit verschiedenem Isospin und verschiedener Masse, aber sonst gleichen Quantenzahlen, stehen nämlich in etwa dem gleichen Verhältnis zueinander, da nur durch die Masse ein nicht sehr großer Unterschied zwischen ihnen zustandekommt.

In Fig. 28 wird die Änderung des t -Verhaltens durch diese Art der Interferenz am Beispiel der skalaren Mesonen σ , ϵ , δ gezeigt. Die Wichtung der einzelnen Diagramme wird dabei durch die Kopplungskonstanten $g_{\chi 0}^2$ der inneren Mesonen gegeben.

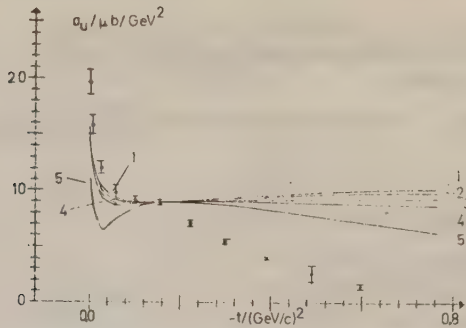


Fig. 28: t -Abhängigkeit von σ_U (normiert) für die π^+ -Photo-
produktion bei Interferenz der Beiträge von den skalaren
Mesonen σ , ϵ , δ für Graphen der Fig. 21a und Vergleich des
Interferenzbeitrages mit dem eines leichten skalaren Teilchens
($\Lambda = 1.3$ GeV)

	g_{σ}^2	g_{ϵ}^2	g_{δ}^2	NF
1	30	60	20	2.72
2	30	60	40	2.80
3	30	60	60	3.31
4	30	60	80	5.39
5 $0^+ (m_{\pi})$				1.23

Man erkennt, daß bei den skalaren Teilchen mit wachsender Kopplungskonstante von δ sich das t -Verhalten des Interferenzbeitrages dem eines leichten skalaren Teilchen 0^+ (m_π) annähert. Durch diese Art der Interferenz können auch mehrere Beiträge destruktiv miteinander interferieren, auch solche mit verschiedenen Spin und verschiedener Parität. Daher ergibt sich ebenfalls ein absorptives Verhalten, wenn man Linearkombinationen von Beiträgen der Fig. 21a mit π , η , η' , σ , ϵ , δ , ρ (magn.), ω , ϕ als inneren Mesonen betrachtet. Die Kurven für solche Linearkombinationen sind in Fig. 29 dargestellt, wobei die Beiträge der Vektormesonen durch Variation der Kopplungskonstanten bzw. des anomalen magnetischen Moments μ_N im Vergleich zu anderen Mesonen verschieden bewertet werden.*) Als wesentlich für eine destruktive Interferenz erweist sich hierbei vor allen Dingen der magnetische Beitrag des ρ -Mesons. Aus Fig. 29 erkennt man, daß die Summe aller Beiträge ein völlig anderes Verhalten gegenüber einem der Einzelbeiträge der pseudoskalaren bzw. der Spin 1-Mesonen besitzt. Insbesondere stimmt die Größenordnung des Interferenzbeitrages.

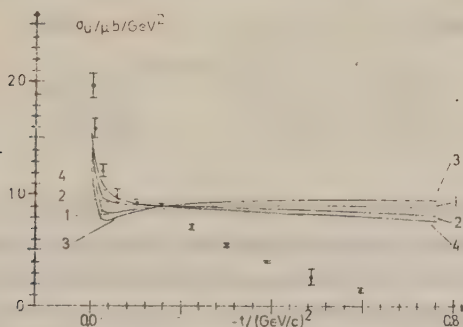


Fig. 29: t -Abhängigkeit von σ_U (normiert) für die π^+ -Photoproduktion bei Interferenz der Beiträge nach Fig. 21a von verschiedenen Mesonen ($\Lambda = 1.3$ GeV)

	g^2_π	g^2_η	$g^2_{\eta'}$	g^2_σ	g^2_ϵ	g^2_δ	$\mu_N^2 \cdot g^2_\rho$	g^2_ω	g^2_ϕ	NF
1	182	0	100	0	85.5	0	1	1	0	1.75
2	182	0	100	0	85.5	0	4	1	0	2.33
3	182	90	20	10	85.5	30	1	1	1	1.55
4	182	90	20	10	85.5	30	11	1	1	5.11

*) Die Werte für die Kopplungskonstanten wurden in Anlehnung an die in Ref. [45] angegebenen Werte gewählt.

Durch Variation von Λ^2 kann ebenfalls das t -Verhalten beeinflußt werden. In Fig. 30 ist diese Variation für die Graphen der Fig. 21a am Beispiel des Pion und des ε -Mesons dargestellt.

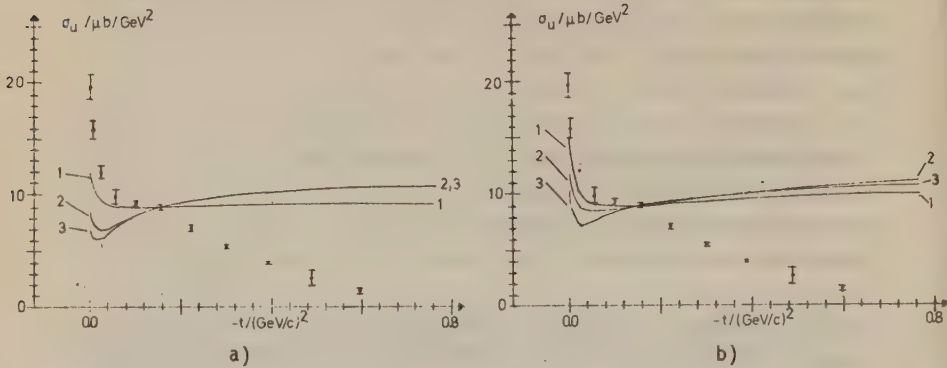


Fig. 30: t -Abhängigkeit von σ_U (normiert) für die π^+ -Photo-
produktion für die Graphen der Fig. 21a für verschiedene
 Λ^2 - Werte

	Λ/GeV	NF		Λ/GeV	NF
a) Pion			b) ε -Meson		
	1 0.6	8.25		1 0.6	3.69
	2 1.3	3.26		2 1.3	4.16
	3 2.1	2.93		3 2.1	2.29

Man erkennt, daß durch Variation von Λ^2 sowohl der Vorwärtspik als auch das t -Verhalten für größeres $-t$ beeinflußt werden. Für kleine Werte von Λ^2 ergibt sich für beide Mesonen ein etwas besseres t -Verhalten als für große Werte, dagegen stimmt die Größenordnung für größere Λ^2 besser. Bei den entsprechenden Ergebnissen für die Spin 1-Mesonen ρ und A_1 ist kaum eine Veränderung im t -Verhalten bei der Variation von Λ^2 zwischen 0.36 GeV^2 und 4.41 GeV^2 festzustellen.

Die Beiträge der Graphen nach Fig. 20a, bei denen der Ansatz (2.11a) für die Vertex-Funktion verwendet wurde, unterscheiden sich nicht wesentlich von denen der Fig. 21a mit Ansatz (2.11b), so daß hier auf ihre Darstellung verzichtet wird.

Die Kurven für die Graphen der Fig. 21b werden in Fig. 31 für die Kombinationen π und σ , π und ϵ , δ und η sowie δ und η' als Mesonen in den Diagrammen gezeigt. Die experimentellen Daten werden weder in Vorwärtsrichtung noch für größeres $-t$ gut beschrieben. Vor allem ist auch die Abweichung der Größenordnung der theoretischen Werte von den experimentellen zu beachten.

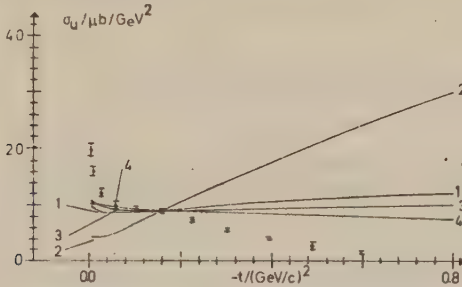


Fig. 31: t -Abhängigkeit von σ_U (normiert) für die π^+ -Photo-
produktion für die Graphen der Fig. 21b
($\Lambda = 1.53$ GeV)

		$g_Y \cdot g_{Y_2}$	NF
1	$\pi\sigma/\sigma\pi$	8.19	46.00
2	$\pi\epsilon/\epsilon\pi$	9.31	32.46
3	$\delta\eta/\eta\delta$	11.24	36.93
4	$\delta\eta'/\eta'\delta$	12.23	24.33

Die Kurven für die Graphen der Fig. 20b mit dem Ansatz (2.11a) für die Vertex-Funktion zeigen keine wesentlichen Abweichungen von denen der Fig. 31 (mit Ansatz (2.11b)).

Eine destruktive Interferenz zwischen den niedrigen Partialwellen der Beiträge der Fig. 20a und 20b bzw. 21a und 21b, also zwischen Graphen mit nur einem inneren Meson und solchen mit zwei inneren Mesonen, ist aus den gleichen Gründen nicht möglich wie zwischen den Graphen der Fig. 20a bzw. 21a mit Spin 0- und Spin 1-Mesonen.

In Fig. 32 ist die Photonasymmetrie Σ für die Graphen der Fig. 21a dargestellt. Wie dieser Figur zu entnehmen ist, stimmt für das skalare Teilchen σ die theoretische Kurve am besten mit der experimentellen Kurve überein, während die Kurven des BTM, die für das Pion und das skalare

Teilchen $0^+ (m_\pi)$ zu schnell vom Minimumwert -1 auf etwa -0.5 oder noch darüber ansteigen. Die Kurven für ρ und A_1 können nicht die experimentellen Daten beschreiben, die Asymmetrie für ρ ist sogar positiv statt negativ.

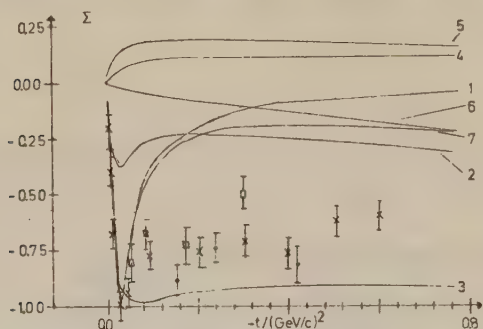


Fig. 32: t -Abhängigkeit der Photon-Asymmetrie Σ für die π^+ -Photo-
produktion für die Graphen der Fig. 21a
($\Lambda = 1.3$ GeV)

1	BTM	4	ρ (elektrisch)	7	$0^+ (m_\pi)$
2	π	5	ρ (magnetisch)		
3	σ	6	A_1		

Eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment ist wieder bei Interferenz zwischen den Mesonen π , η , η' , σ , ϵ , δ , ρ (magn.), ω , ϕ in den Graphen der Fig. 21a vorhanden, wie aus Fig. 33 ersichtlich ist. Der Interferenzbeitrag besitzt keine Ähnlichkeit mehr mit dem Beitrag eines einzelnen pseudoskalaren bzw. Spin 1-Mesons.

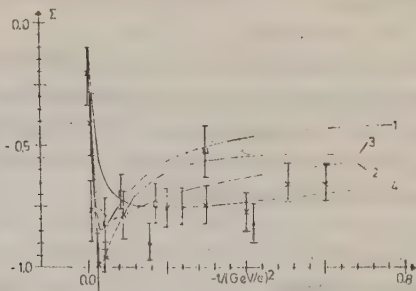


Fig. 33: t -Abhängigkeit der Photon-Asymmetrie Σ für die Graphen der
Fig. 21 a bei Interferenzen zwischen den Beiträgen der
Mesonen π , η , η' , σ , ϵ , δ , ρ (magn.), ω , ϕ
($\Lambda = 1.3$ GeV)
Es gelten die gleichen Parameter wie bei Fig. 29.

Die Ergebnisse der Rechnungen für die Graphen der Fig. 21b sind in Fig. 34 dargestellt.

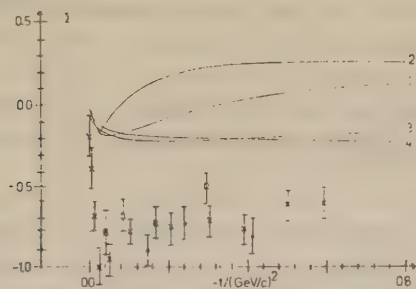


Fig. 34: t -Abhängigkeit der Photon-Asymmetrie Σ für die π^+ -Photoproduktion für die Graphen der Fig. 21b ($\Lambda = 1.53$ GeV)

1	$\pi\sigma/\sigma\pi$	3	$\delta\eta/\eta\delta$
2	$\pi\varepsilon/\varepsilon\pi$	4	$\delta\eta'/\eta'\delta$

Alle Kurven zeigen einen Verlauf, der mit dem Experiment nicht übereinstimmt. Für den bezüglich aller Teilchen am Vertex symmetrischen Ansatz (2.11a) sind die Kurven für die Graphen der Fign. 20a und 20b in Fig. 35 angegeben.

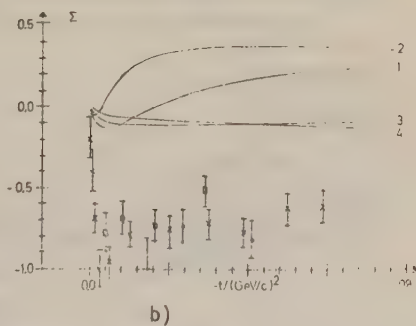
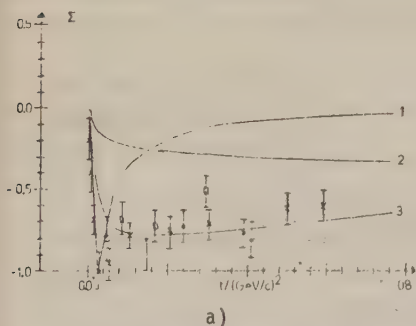


Fig. 35: t -Abhängigkeit der Photon-Asymmetrie Σ für die π^+ -Photoproduktion ($\Lambda = 1.53$ GeV) für die Graphen

a) der Fig. 20a

1	BTM
2	π
3	σ

b) der Fig. 20b

1	$\pi\sigma/\sigma\pi$
2	$\pi\varepsilon/\varepsilon\pi$
3	$\delta\eta/\eta\delta$
4	$\delta\eta'/\eta'\delta$

Die Beiträge der Diagramme mit zwei inneren Mesonen (Fig. 20b) weisen ebenfalls keine gute Übereinstimmung mit den Daten auf. Für die Graphen mit nur einem inneren Meson der Fig. 20a ist das ausgeprägte Minimum bei $t \approx -\mu^2$ nicht mehr vorhanden; der Beitrag mit dem σ -Meson stimmt gut mit dem Experiment überein, besser als für Ansatz (2.11b) für die Vertex-Funktion (vgl. Fig. 34). Das Pion als inneres Meson in den Graphen der Fig. 20a dagegen kann den experimentellen Kurvenverlauf nicht wiedergeben.

Die Kurven für die Target-Asymmetrie für die Graphen der Fig. 21a sind in Fig. 36 dargestellt. Während sich für σ_U und Σ die Kurven für die Graphen der Fig. 21a mit dem Pion und dem σ -Meson nur quantitativ unterscheiden, besteht bei der Target-Asymmetrie ein qualitativer Unterschied zwischen den beiden Beiträgen, und zwar durch das Vorzeichen. Aus Fig. 36 ist ersichtlich, daß nur das σ -Meson die experimentellen Daten im Bereich $-t \leq 0.4$ (GeV/c)² beschreiben kann.

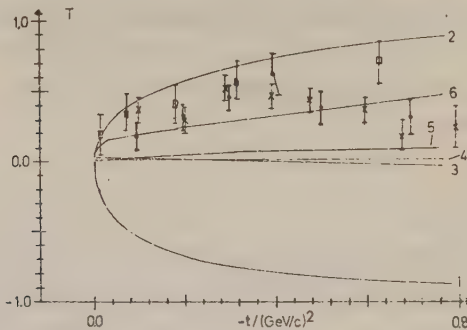


Fig. 36: t -Abhängigkeit der Target-Asymmetrie T für die π^+ -Photoproduktion für die Graphen der Fig. 21a ($\Lambda = 1.3$ GeV)

1	π	3	ρ (elektrisch)	5	A_1
2	σ	4	ρ (magnetisch)	6	$0^+(m_\pi)$
$\square$	SLAC	5 GeV	[15]		
$\times$	DESY	5 GeV	[16]		
$\cdot$	DESY	2.5 GeV	[16]		

Die Target-Asymmetrie bei den Spin 1-Mesonen ρ und A_1 erweist sich im Vergleich mit dem Experiment als viel zu gering.

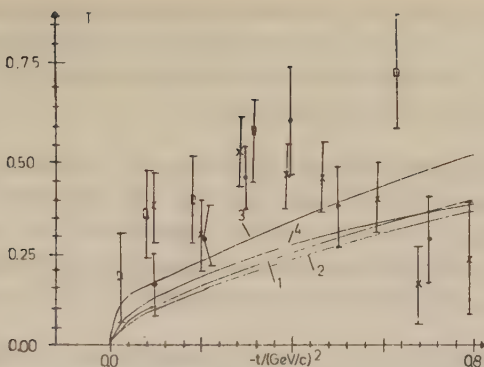


Fig. 37: t -Abhängigkeit der Target-Asymmetrie T für die π^+ -Photoproduktion für die Graphen der Fig. 21a bei Interferenz der Beiträge mit den Mesonen π , η , η' , σ , ε , δ , ρ (magn.), ω , ϕ ($\Lambda = 1.3$ GeV)

Es gelten die gleichen Parameter wie bei Fig. 29.

Durch Interferenz der Mesonen π , η , η' , σ , ε , δ , ρ (magn.), ω , ϕ kann - wie bei σ_U und Σ - eine bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Daten auch für T erreicht werden, wie aus Fig. 37 zu ersehen ist.

Eine weitere Untersuchung zeigte, daß durch Interferenz zwischen π und σ keine bessere Übereinstimmung mit dem Experiment für $-t \leq 0.4$ (GeV/c)² erzielt werden kann.

In Fig. 38 ist die t -Abhängigkeit der Target-Asymmetrie für die Graphen der Fig. 20b dargestellt, in die zum Vergleich auch die Kurven der Graphen von Fig. 20a für π und σ eingetragen wurden.

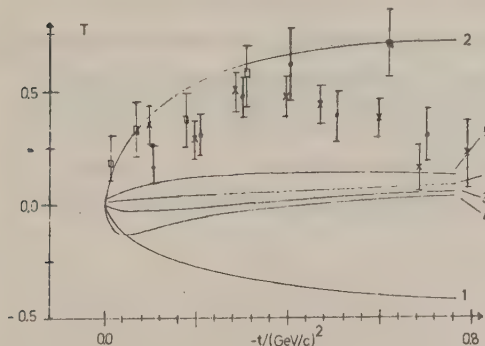


Fig. 38: t -Abhängigkeit der Target-Asymmetrie T für die π^+ -Photoproduktion für die Graphen der Fig. 20a (1,2) und 20b (3-6) ($\Lambda = 1.53$ GeV)

1	π	2	σ
3	$\pi\sigma/\sigma\pi$	4	$\pi\varepsilon/\varepsilon\pi$
5	$\delta\eta/\eta\delta$	6	$\delta\eta'/\eta'\delta$

Wie man der Fig. 38 entnehmen kann, stimmen die Kurven für die Graphen mit zwei inneren Mesonen nicht mit den Daten überein. Mit dem Ansatz (2.11b) für die Vertex-Funktion erhält man für die entsprechenden Graphen (Fig. 21) qualitativ das gleiche Ergebnis.

Nachdem bei den bisherigen Betrachtungen bereits deutlich geworden ist, daß als einzelne Beiträge nur die Graphen der Fig. 20a und 21a mit skalaren Mesonen die experimentellen Daten erklären können, soll für die skalaren Mesonen und zum Vergleich noch für die pseudoskalaren Mesonen die Abhängigkeit von den Massen demonstriert werden.

In Fig. 39 ist die Massenabhängigkeit für die pseudoskalaren Mesonen dargestellt für den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt σ_U und in Fig. 40 für die Photon-Asymmetrie Σ .

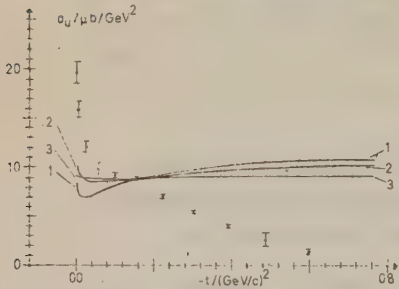


Fig. 39:

t-Abhängigkeit von σ_U (normiert) für die π^+ -Photoproduktion für die Graphen der Fig. 21a mit pseudoskalaren Mesonen verschiedener Masse ($\Lambda = 1.3$ GeV)

1	π	NF	3.26
2	η		7.16
3	η'		52.1

Für größere Massen der pseudoskalaren Mesonen (η , η') stimmt die t-Abhängigkeit der theoretischen Kurven für σ_U zunehmend etwas besser mit dem Experiment überein (bei größeren Massen von ≈ 1600 MeV wird sie dann aber wieder schlechter).

Für die Photon-Asymmetrie erhält man (auch) für mittlere Massen (η) die beste Kurve.

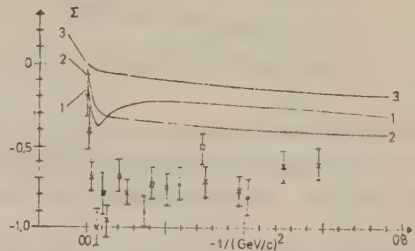


Fig. 40:

t-Abhängigkeit der Photon-Asymmetrie Σ für die π^+ -Photoproduktion für die Graphen der Fig. 21a mit pseudoskalaren Mesonen verschiedener Masse ($\Lambda = 1.3$ GeV)

1	π
2	η
3	η'

Die Massenabhängigkeit für die skalaren Teilchen ist in den Fign. 41-43 dargestellt.

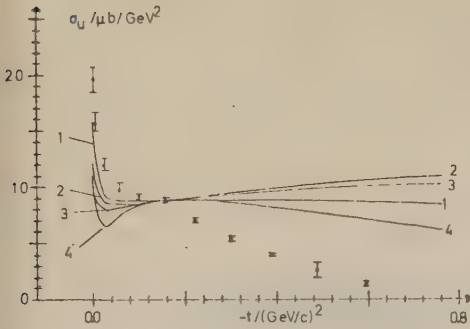


Fig. 41:

t-Abhängigkeit von σ_U (normiert) für die π^+ -Photoproduktion für die Graphen der Fig. 21a mit skalaren Mesonen verschiedener Masse ($\Lambda = 1.3$ GeV)

1	σ	NF 1.98	3	δ	NF 4.84
2	ϵ	4.16	4	$O^+(m_\pi)$	1.23

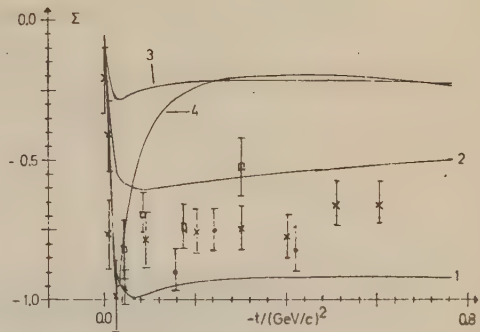


Fig. 42:

t-Abhängigkeit der Photon-Asymmetrie Σ für die π^+ -Photoproduktion für die Graphen der Fig. 21a mit skalaren Mesonen verschiedener Masse ($\Lambda = 1.3$ GeV)

1	σ	3	δ
2	ϵ	4	$O^+(m_\pi)$

Beim unpolarisierten Wirkungsquerschnitt σ_U ist für kleine Massen ($\sigma, O^+(m_\pi)$) die Übereinstimmung mit dem experimentellen Kurvenverlauf besser als für größere Massen (ϵ, δ). Für die Photon-Asymmetrie Σ erhält man für σ (450 MeV) und ϵ (700 MeV) Kurven, die den experimentellen Daten nahekommen, während für kleinere ($O^+(m_\pi)$) oder größere (δ) Massen die theoretische Kurve für die Asymmetrie bei größerem $-t$ nur 1/3 des Wertes der experimentellen Kurve erreicht. Entsprechend den Kurven für σ und ϵ sollte die Kurve für ein skalares Teilchen mit einer Masse von ungefähr 500 MeV volle Übereinstimmung mit den Daten erbringen.

Die Target-Asymmetrie T (Fig. 43) zeigt für die schwereren skalaren Mesonen (σ, ϵ, δ) annähernd die gleiche Güte der Übereinstimmung mit dem Experiment für $-t \leq 0.4 (\text{GeV}/c)^2$, für das leichte skalare Meson $O^+(m_\pi)$ ist der Anstieg für kleines $-t$ zu gering.

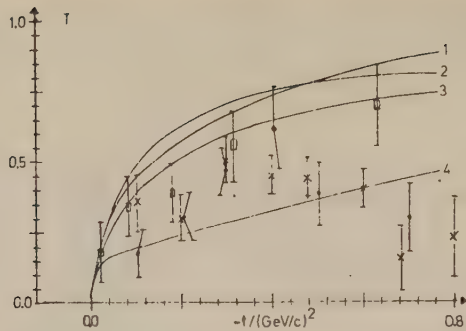


Fig. 43: t -Abhängigkeit der Target-Asymmetrie T für die π^+ -Photoproduktion für die Graphen der Fig. 21a mit skalaren Mesonen verschiedener Masse ($\Lambda = 1.3$ GeV)

1	σ	3	δ
2	ϵ	4	$0^+(m_\pi)$

6.2.2. Elektroproduktion

In Fig. 44 sind für das BTM und für die Graphen der Fig. 21a mit den Mesonen π , σ , ρ , A_1 und $0^+(m_\pi)$ die theoretischen Kurven für $\sigma_U + \epsilon\sigma_S$ für $k^2 = -.55 \text{ GeV}^2$ dargestellt.

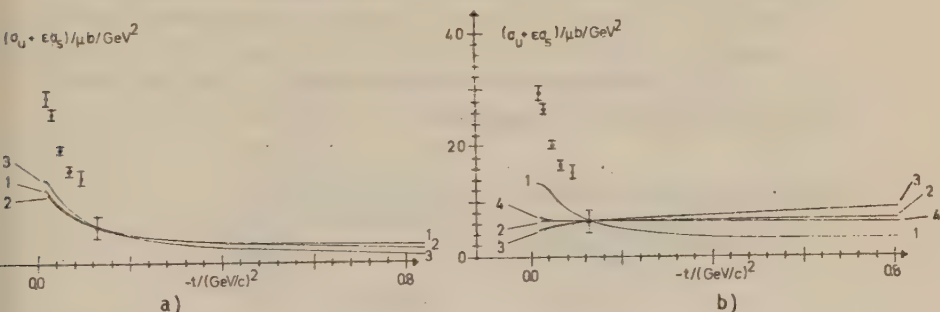


Fig. 44: t -Abhängigkeit von $\sigma_U + \epsilon\sigma_S$ (normiert) für die π^+ -Elektroproduktion ($k^2 = -.55 \text{ GeV}^2$) für die Graphen der Fig. 21a für verschiedene Mesonen ($\Lambda = 1.53 \text{ GeV}$)

a)	1	π	NF 2.35	b)	1	BTM	NF 1.57
	2	σ	1.57		2	ρ (elektr.)	26.2
	3	$0^+(m_\pi)$	1.39		3	ρ (magnet.)	23.26
					4	A_1	239

Zwischen skalaren und pseudoskalaren Mesonen besteht bezüglich des t -Abfalls kein großer Unterschied. Man sieht einen Anstieg dieser Kurven in Vorwärtsrichtung, wenn auch nicht so ausgeprägt wie bei der experimentellen Kurve. Für die Spin 1-Mesonen ρ und A_1 ist kaum eine t -Abhängigkeit zu erkennen; die Übereinstimmung mit den experimentellen Daten, auch bezüglich der Größenordnung, ist schlecht.

Für die Graphen der Fig. 21b sind die Ergebnisse für $k^2 = -.55 \text{ GeV}^2$ in Fig. 45 wiedergegeben. Es liegt hinsichtlich des Abfalls und der Größenordnung der Normierungskonstanten keine gute Übereinstimmung mit dem Experiment vor. Der gegenüber der Photoproduktion große Normierungsfaktor bei den Kurven 1 und 2 ist auf den hohen Beitrag von σ_S zurückzuführen; σ_U liegt annähernd in der gleichen Größenordnung wie bei der Photoproduktion.

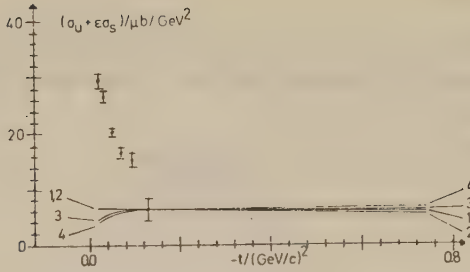


Fig. 45: t -Abhängigkeit für $\sigma_U + \epsilon \sigma_S$ (normiert) für die π^+ -Elektroproduktion ($k^2 = -.55 \text{ GeV}^2$) für die Graphen der Fig. 21b ($\Lambda = 1.53 \text{ GeV}$)

1	$\pi\sigma/\sigma\pi$	NF 3319
2	$\pi\epsilon/\epsilon\pi$	6127
3	$\delta\eta/\eta\delta$	22.1
4	$\delta\eta'/\eta'\delta$	15.2

Für den in bezug auf alle Teilchen des Vertex symmetrischen Ansatz (2.11a) für die Vertex-Funktion (Fig. 20a und 20b) erhält man im wesentlichen die gleichen Ergebnisse wie in den Fig. 44 und 45, der t -Abfall für größeres $-t$ wird jedoch etwas schlechter.

Die t -Abhängigkeit des transversal-transversal Interferenzterms σ_T ist für die Graphen der Fig. 21a in Fig. 46 dargestellt. Wieder erhält man bezüglich der Beiträge der Fig. 21a vom σ -Meson das beste Ergebnis.

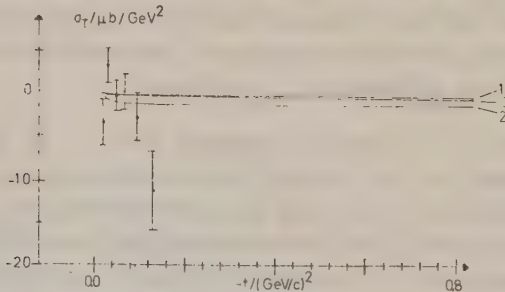


Fig. 46: t -Abhängigkeit für σ_T (normiert) für die π^+ -Elektroproduktion ($k^2 = -.55 \text{ GeV}^2$) für die Graphen der Fig. 21a ($\Lambda = 1.53 \text{ GeV}$)

1	π	NF 2.35
2	σ	1.57
3	$0^+(m_\pi)$	1.39

Für ρ und A_1 in den Graphen der Fig. 21a bzw. für die Graphen der Fig. 20b und 21b erhält man Ergebnisse, die sich von denen in Fig. 46 kaum unterscheiden.

Für den skalar-transversal-Interferenzterm σ_I sind die theoretischen Kurven in den Fig. 47 - 49 wiedergegeben. Wie die Fig. 47, in der die Kurven für die Graphen der Fig. 21a mit einem inneren Meson dargestellt sind, zeigt, stimmt sowohl die t -Abhängigkeit als auch die Lage der Nullstelle für das σ -Meson am besten mit dem Experiment überein.

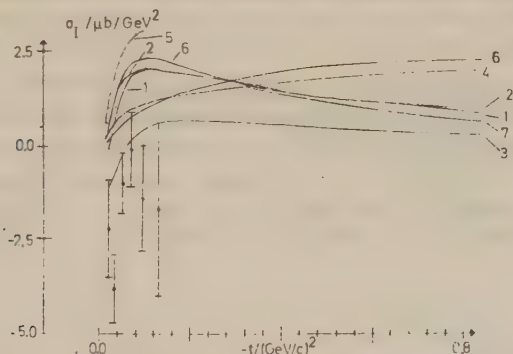


Fig. 47: t -Abhängigkeit für σ_I (normiert) für die π^+ -Elektroproduktion ($k^2 = -0.55 \text{ GeV}^2$) für die Graphen der Fig. 21a ($\Lambda = 1.53 \text{ GeV}$)

1	BTM	NF	1.57	4	ρ (elektr.)	NF	26.21
2	π		2.35	5	ρ (magnet.)		23.26
3	σ		1.52	6	A_1		2.39
				7	$0^+(m_\pi)$		1.39

In Fig. 48 sind die Kurven für die Graphen der Fig. 21b mit zwei inneren Mesonen dargestellt. Sie weisen keine gute Übereinstimmung mit dem Experiment auf, insbesondere auch bezüglich der Größenordnungen.

Fig. 49 zeigt die Kurven der Graphen für die Fig. 20a und 20b mit dem in allen Linien des Vertex symmetrischen Ansatz (2.11a) für die Vertex-Funktion.

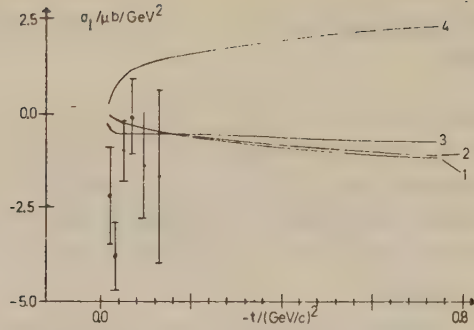


Fig. 48: t -Abhängigkeit für σ_I (normiert) für die π^+ -Elektroproduktion ($k^2 = -0.55 \text{ GeV}^2$) für die Graphen der Fig. 21b ($\Lambda = 1.53 \text{ GeV}$)

1	$\pi\sigma/\sigma\pi$	NF 3319	*)	3	$\delta\eta/\eta\delta$	NF 22.1
2	$\pi\varepsilon/\varepsilon\pi$	6127	*)	4	$\delta\eta'/\eta'\delta$	15.2

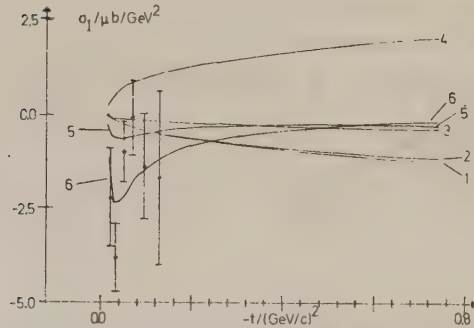


Fig. 49: t -Abhängigkeit für σ_I (normiert) für die π^+ -Elektroproduktion ($k^2 = -0.55 \text{ GeV}^2$) für die Graphen der Fig. 20a (5,6) und 20b (1-4); ($\Lambda = 1.53 \text{ GeV}$)

1	$\pi\sigma/\sigma\pi$	NF 4535	*)	5	π	NF 17.3
2	$\pi\varepsilon/\varepsilon\pi$	10287	*)	6	σ	2.44
3	$\delta\eta/\eta\delta$	32.7				
4	$\delta\eta'/\eta'\delta$	70.7				

*) Vgl. S. 71, letzter Absatz: Bemerkungen zu Fig. 45.

Während sich die Kurven für die Graphen der Fig. 20b kaum von denen der Fig. 21b (Fig. 48) unterscheiden, ist eine Änderung bei den Kurven für die Graphen der Fig. 20a mit nur einem inneren Meson zu bemerken (vgl. Fig. 47), die jetzt ein Minimum bei $t \approx -\mu^2$ besitzen; eine Nullstelle für σ_I tritt jedoch nicht mehr auf. Auch hier erhält man also für das σ -Meson wieder am ehesten Übereinstimmung mit dem Experiment.

Ähnlich wie bei der Photoproduktion wurden auch in der Elektroproduktion Möglichkeiten zur destruktiven Interferenz der niedrigsten Partialwellen untersucht. Solche Interferenzen gibt es - wie in der Photoproduktion - nur für die Graphen der Fig. 20a bzw. 21a mit nur einem inneren Meson für Mesonen mit gleichem Spin und gleicher Parität, aber verschiedener Masse und verschiedenen Isospin. In Fig. 50 wird dies wieder am Beispiel der skalaren Mesonen demonstriert.

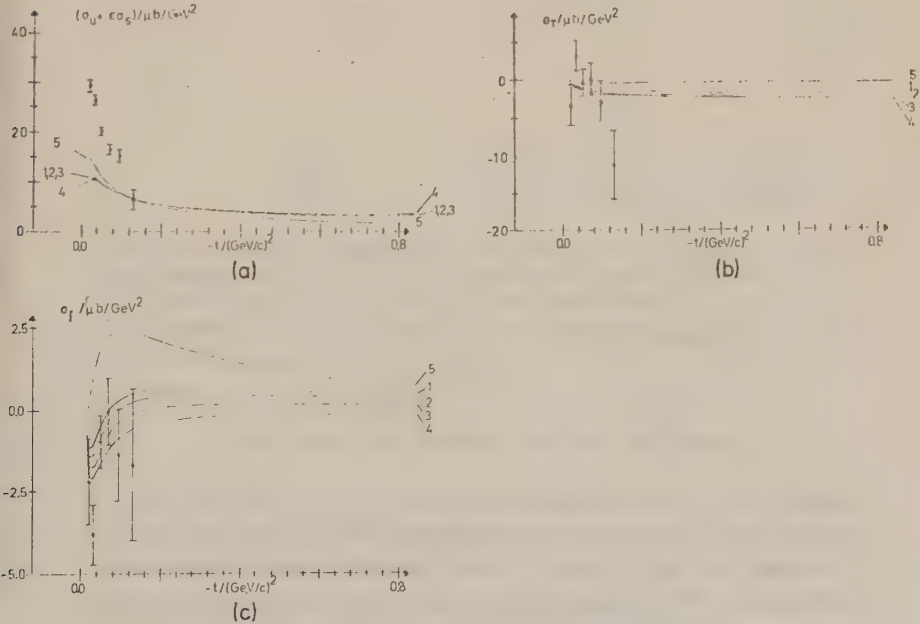


Fig. 50: t -Abhängigkeit für die π^+ -Elektroproduktion ($k^2 = -.55 \text{ GeV}^2$) bei Interferenz skalarer Mesonen verschiedener Masse in den Graphen der Fig. 21a - ($\Lambda = 1.53 \text{ GeV}$) - für

a) $\sigma_U + \epsilon \sigma_S$ (normiert); b) σ_T (normiert); c) σ_I (normiert)

1	NF	1.66	4	NF	1.93	Es gelten die gleichen Parameter wie in Fig.28
2		1.63	5		1.39	
3		1.67				

Für die Linearkombinationen der Beiträge der Mesonen π , η , η' , σ , ε , δ , ρ (magnetisch), ω , ϕ sind die Interferenzkurven in Fig. 51 dargestellt.

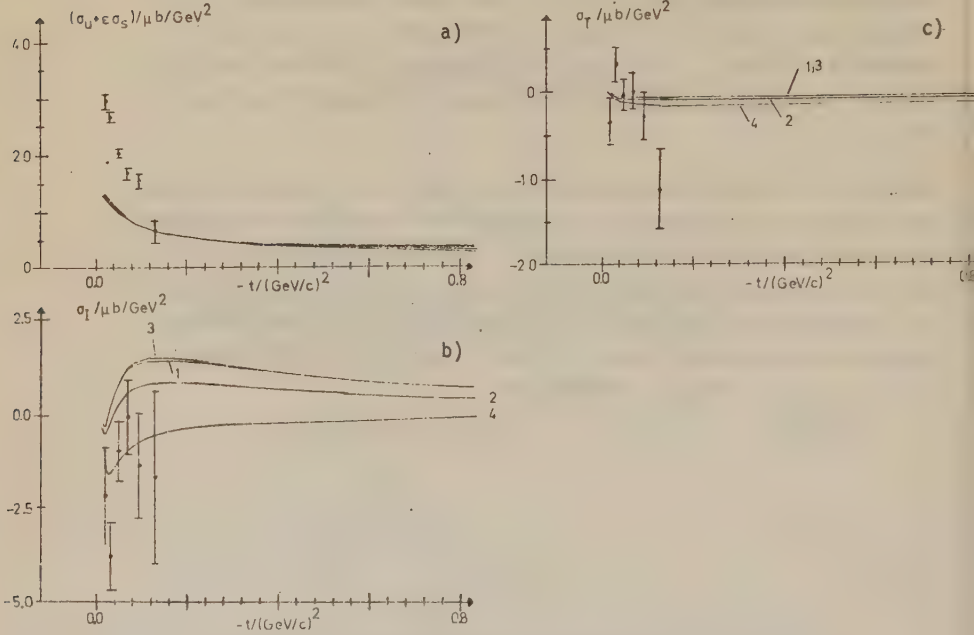


Fig. 51: t -Abhängigkeit für die π^+ -Elektroproduktion ($k^2 = -0.55 \text{ GeV}^2$) bei Interferenz der Mesonen π , η , η' , σ , ε , δ , ρ (magnetisch), ω , ϕ in den Graphen der Fig. 21a - ($\Lambda = 1.3 \text{ GeV}$) - für

a) $\sigma_U + \varepsilon\sigma_S$ (normiert); b) σ_T (normiert); c) σ_I (normiert)

1	NF 1.97	3	NF 1.73
2	2.09	4	2.49

Es gelten die gleichen Parameter wie in Fig. 29

Während $\sigma_U + \varepsilon\sigma_S$ ziemlich unabhängig von der Art der Linearkombination zu sein scheint, reagieren die Interferenzterme empfindlicher darauf. Es ist auch in Fig. 51 wieder zu sehen, daß die Interferenzkurven ein völlig anderes t -Verhalten zeigen als der einzelne Beitrag eines pseudo-skalaren oder Spin 1-Mesons.

Der bisher für $k^2 = -.55 \text{ GeV}^2$ beschriebene Vergleich der verschiedenen Modellrechnungen mit dem Experiment wurde auch für die beiden anderen experimentell bekannten k^2 -Werte $-.26 \text{ GeV}^2$ und $-.75 \text{ GeV}^2$ durchgeführt. Dabei ergab sich das gleiche Verhalten für die einzelnen Fälle.

Die absoluten (nicht-normierten) Kurven für die Vertex-Funktion werden mit π und σ für $\sigma_U + \epsilon\sigma_S$, σ_T und σ_I in den Fign. 52 - 54 für alle drei k^2 -Werte gezeigt. Zum Vergleich wurden in diese Darstellungen noch die Kurven für das BTM eingetragen. Man erkennt, daß das σ -Meson insgesamt die beste Übereinstimmung mit dem Experiment aufweist.

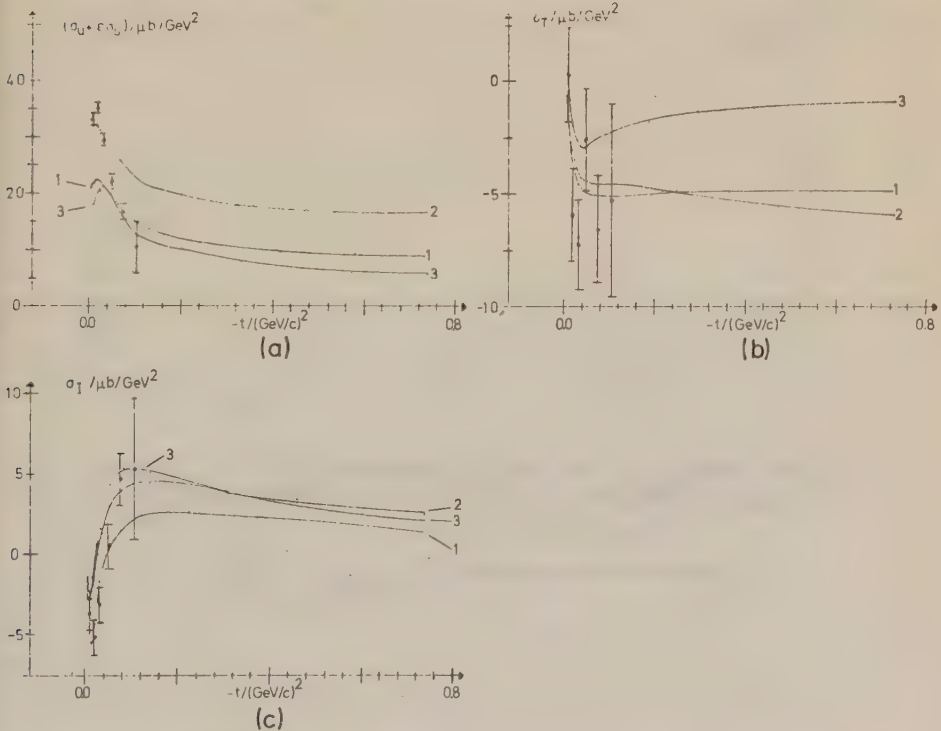


Fig. 52: t -Abhängigkeit für die π^+ -Elektroproduktion ($k^2 = -.26 \text{ GeV}^2$) für die Graphen der Fig. 21a ($\Lambda = 1.53 \text{ GeV}$) für

a) $\sigma_U + \epsilon\sigma_S$; b) σ_T ; c) σ_I .

Es sind Kurven dargestellt für:

- | | |
|---|----------|
| 1 | σ |
| 2 | π |
| 3 | BTM |

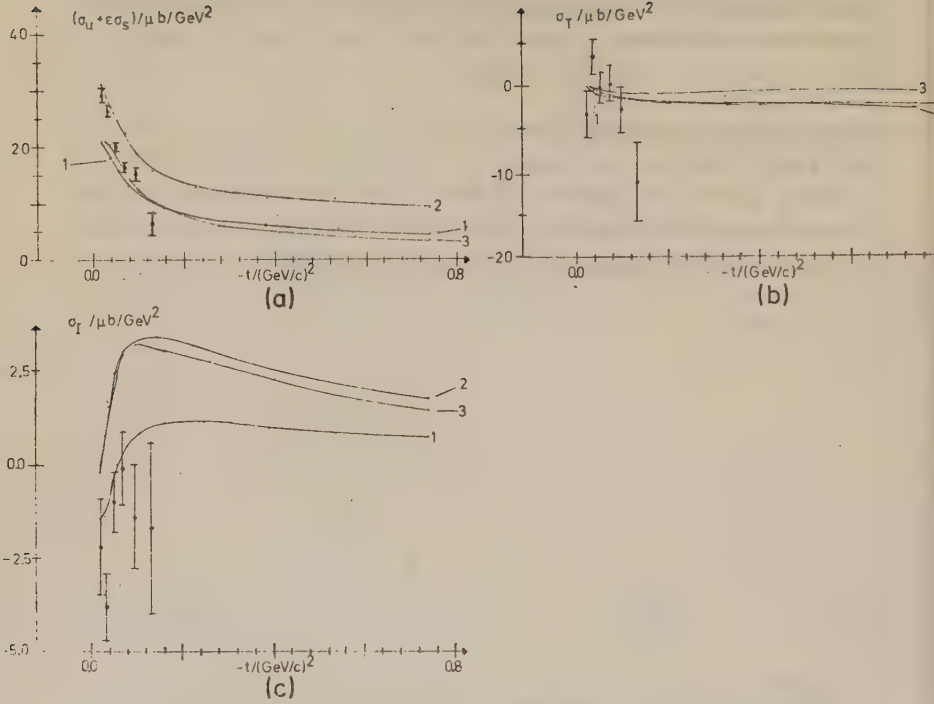


Fig. 53: t -Abhängigkeit für die π^+ -Elektroproduktion ($k^2 = -.55 \text{ GeV}^2$)
für die Graphen der Fig. 21a - ($\Lambda = 1.53 \text{ GeV}$) - für

a) $\sigma_U + \epsilon \sigma_S$; b) σ_T ; c) σ_I

Es sind Kurven dargestellt für:

1	σ
2	π
3	BTM

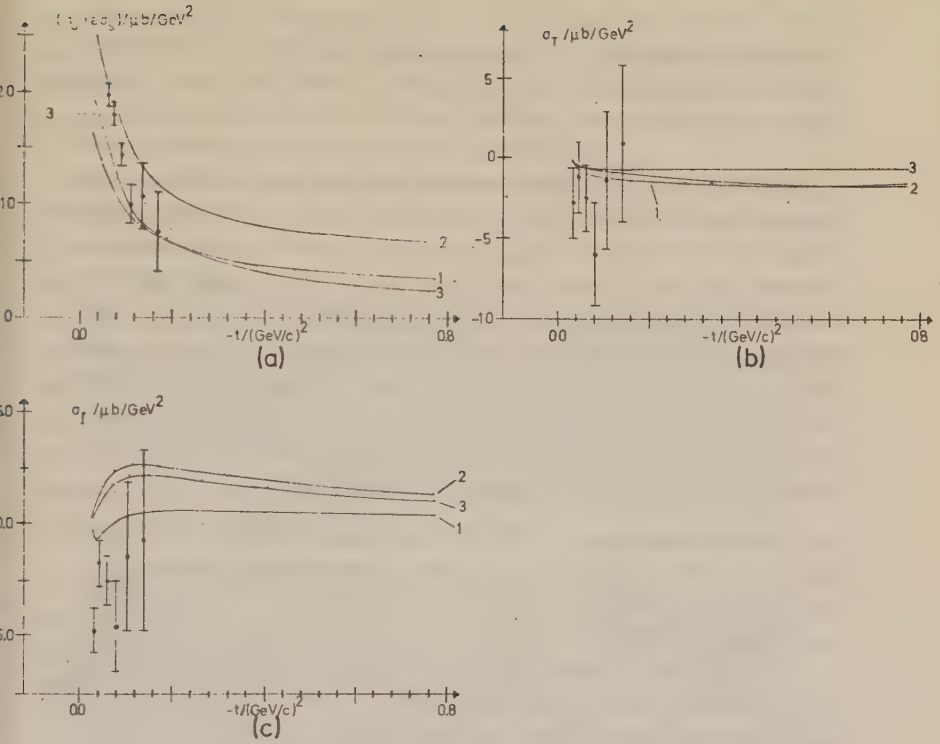


Fig. 54: t -Abhängigkeit für die π^+ -Elektroproduktion ($k^2 = -0.75 \text{ GeV}^2$) für die Graphen der Fig. 21a ($\Lambda = 1.53 \text{ GeV}$) - für

a) $\sigma_U + \epsilon\sigma_S$; b) σ_T ; c) σ_I

Es sind Kurven dargestellt für:

1	σ
2	π
3	BTM

6.3. Diskussion der Ergebnisse

In der Photoproduktion findet man, daß die Diagramme mit einem inneren Meson für ein skalares Teilchen mit Isospin 0 und einer Masse zwischen 450 und 700 MeV bzw. der Interferenzbeitrag solcher Diagramme mit π , η , η' , σ , ϵ , δ , ρ (magnetisch), ω , ϕ sich für die Beschreibung der experimentellen Ergebnisse am besten eignen, während die übrigen untersuchten Möglichkeiten dafür nicht in Frage kommen. So ist das t -Verhalten für σ_U im Bereich $-t_{\min} \leq -t \leq 0.2 \text{ (GeV/c)}^2$ in Übereinstimmung mit dem Experiment, wogegen das BTM nur bis $-t = -\mu^2 = 0.02 \text{ (GeV/c)}^2$ die Daten erklären kann. Bei der Photon-Asymmetrie Σ zeigt sich, daß nicht nur in Vorwärtsrichtung wie beim BTM, sondern im gesamten experimentell erfaßten t -Bereich die theoretischen Kurven die Daten beschreiben. Für die Target-Asymmetrie erhält man nicht nur das richtige Vorzeichen, sondern es können bis $-t = 0.4 \text{ (GeV/c)}^2$ die Daten beschrieben werden, während das BTM keinen Beitrag für T liefert.

Bei der Elektroproduktion lassen sich die experimentellen Daten durch die gleichen Diagramme und die gleichen inneren Mesonen beschreiben. Für $\sigma_U + \epsilon\sigma_S$ kann das t -Verhalten bis $-t = 0.1 \text{ (GeV/c)}^2$ erklärt werden. Der schwache t -Abfall für größeres $-t$ ist darauf zurückzuführen, daß σ_U zu schwach mit t abfällt, wie schon aus der Photoproduktion bekannt. σ_S dagegen weist einen schnellen Abfall in t auf (vgl. Fig.55), so daß das t -Verhalten von $\sigma_U + \epsilon\sigma_S$ für größeres $-t$ durch σ_U bestimmt wird. Die theoretischen Kurven für σ_T und σ_I beschreiben im Rahmen der Meßgenauigkeit die bisher vorliegenden Daten.

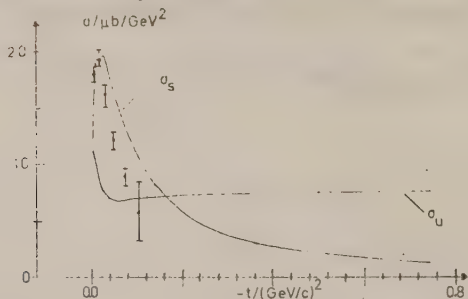


Fig. 55: Vergleich der t -Abhängigkeit von σ_U und σ_S mit den experimentellen Werten für $\sigma_U + \epsilon\sigma_S$ für die π^+ -Elektroproduktion ($k^2 = -0.26 \text{ GeV}^2$) für die Graphen der Fig. 21a mit dem skalaren Meson ($\Lambda = 1.53 \text{ GeV}$)

Die experimentellen Werte für $\sigma_U + \epsilon\sigma_S$ wurden an die Größe der theoretischen Werte angepaßt, um einen besseren Vergleich zu ermöglichen.

Die Ergebnisse für Einzelbeiträge von Diagrammen mit nur einem inneren Meson für Vektor- und Pseudovektormesonen sowie für die Diagramme mit zwei inneren Mesonen sind nicht in Übereinstimmung mit den experimentellen Werten, sowohl bezüglich des t -Verhaltens als auch bezüglich der Größenordnung.

In den Ergebnissen für die beiden betrachteten Ansätze für die Meson-Nukleon-Vertex-Funktion bestehen sowohl qualitativ als auch quantitativ keine großen Unterschiede.

Nimmt man als Näherung für den Pion-Nukleon-Vertex die Summe der Diagramme mit einem inneren Meson für π und σ und berücksichtigt den in Abschnitt 3.4. durch Vergleich mit dem FERRARI-SELLERI-Formfaktor erhaltenen kleinen Wert für Λ^2 von nur 0.36 GeV^2 , so zeigt sich, daß der Beitrag des Diagramms mit dem Pion unterdrückt wird. Dieser Wert für das Verhältnis Λ^2/μ^2 beträgt ungefähr 17 und liegt damit in der gleichen Größenordnung wie die gleichen Verhältnisse für die anderen Mesonen und die Nukleonen im Fall $\Lambda^2 \approx 2 \text{ GeV}^2$.

Das Resultat der numerischen Rechnungen steht in Übereinstimmung mit den Anhaltspunkten, die aus dem Verhalten der Diagramme für hohe Energien gewonnen wurden. Dort zeigt sich, daß das Boxdiagramm mit einem inneren skalaren Meson ein ähnliches Verhalten hat wie der Graph mit ρ -Austausch im t -Kanal. Insbesondere läßt sich zeigen, daß das Vorzeichen für die Target-Asymmetrie T mit der Parität der spinlosen Mesonen im Boxdiagramm verknüpft ist; für skalare Teilchen erhält man das richtige Vorzeichen für T .

Man sieht also, daß man für die Dreiecksnäherung für hadronische Vertizes, die mit der Vorstellung von zusammengesetzten Hadronen verbunden ist, eine bessere Beschreibung der experimentellen Daten erhält als für das bezüglich der Anzahl der freien Parameter vergleichbare BTM mit punktförmigen Vertizes.

Es hat sich also herausgestellt, daß ein Modell mit Diagrammen, die nur ein skalares Meson mit Isospin 0, d.h. mit den Quantenzahlen des Vakuums, als inneres Meson besitzen, zu einer vernünftigen Beschreibung der Experimente führt. Das gleiche gilt, wenn man zu dem skalaren Meson noch den Beitrag mit einem inneren Pion hinzunimmt (weil dann der Beitrag des Pions unterdrückt wird) oder wenn man eine Summe von Beiträgen mit inneren

Mesonen (π , η , η' , σ , ϵ , δ , ρ (magnetisch), ω , ϕ) mit Isospin 0 und Isospin 1 hat. Bei der Herleitung des Modells wurde von der Struktur-entwicklung für den Meson-Nukleon-Vertex ausgegangen. Als dominierender Beitrag wurde eine Summe von Dreiecksgraphen angesehen. Das oben beschriebene Ergebnis kann man nun so interpretieren, daß entweder in dieser Summe die genannten Meson-Austausche dominieren oder daß es sich um effektive Austausche handelt, die eine Summe von Graphen höherer Ordnung ersetzen.

6.4. Voraussagen für die Elektroproduktion

In Kürze wird die getrennte Bestimmung von σ_U und σ_S durch Messungen für verschiedene ϵ -Werte erwartet. Daher sollen auf der Grundlage des Modellbeitrages mit einem inneren σ -Meson nach Fig. 21a noch Aussagen über σ_U und σ_S gemacht werden. In Fig. 56 sind diese Kurven für die drei k^2 -Werte dargestellt, für die bereits Meßergebnisse für $\sigma_U + \epsilon \sigma_S$ vorliegen.

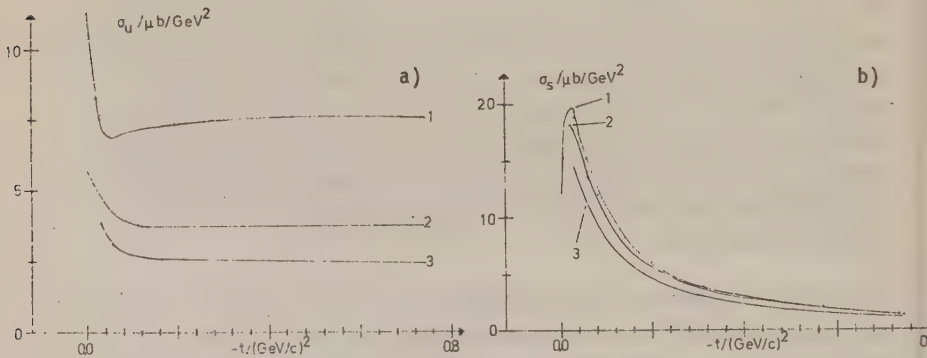


Fig. 56: t -Abhängigkeit für die π^+ -Elektroproduktion für die Graphen der Fig. 21a mit dem σ -Meson als innerem Meson ($\Lambda = 1.53$ GeV)

a)	σ_U ;	b)	σ_S
1	$k^2 = -.26$ GeV ²		
2	$k^2 = -.55$ GeV ²		
3	$k^2 = -.75$ GeV ²		

Außerdem werden noch in Fig. 57 die Kurven für die Asymmetrien in der Definition nach [5] für polarisierte Leptonen L , für polarisierte Targetnukleonen $T_x^{(2)}$ und $T_y^{(1)}$ sowie für polarisierte Leptonen und polarisierte Targetnukleonen $L_x^{(2)}$ gezeigt.

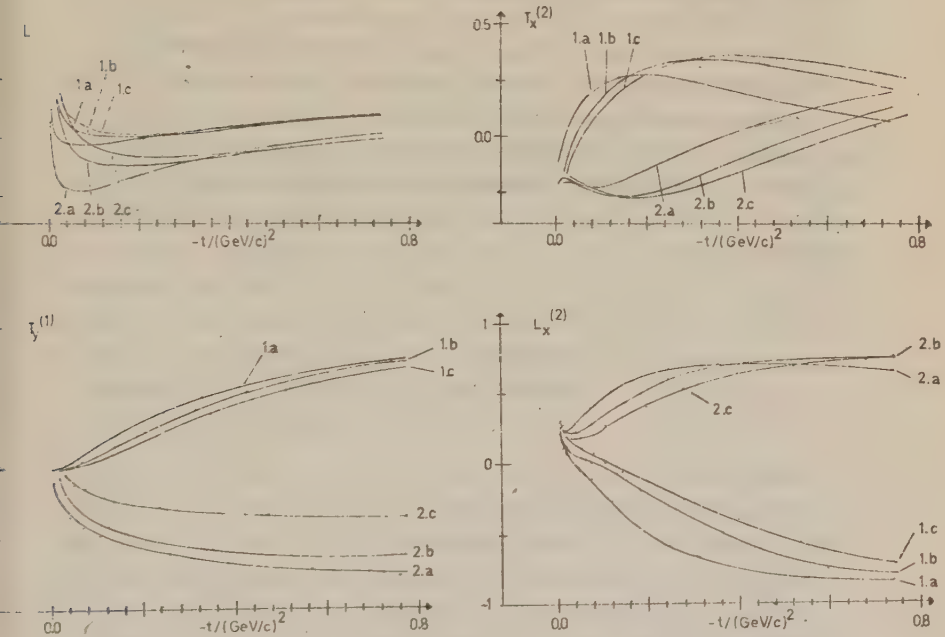


Fig. 57: t -Abhängigkeit für verschiedene Asymmetrien der π^+ -Elektroproduktion für die Graphen der Fig.21a
1. mit dem σ -Meson als innerem Meson und
2. mit dem Pion als innerem Meson
($\Lambda = 1.53$ GeV)

- a) $k^2 = -.26$ GeV²
- b) $k^2 = -.55$ GeV²
- c) $k^2 = -.75$ GeV²

Die Voraussagen in Fig. 57 sind die Kurven für das σ -Meson. Die Kurven für das Pion sind zusätzlich aufgenommen worden, um deutlich zu machen, daß auch in der Elektroproduktion sich die Beiträge von π und σ , z.B. für die Asymmetrien $T_x^{(2)}$, $T_y^{(1)}$ und $L_x^{(2)}$, durch ein Vorzeichen unterscheiden wie bei der Target-Asymmetrie in der Photoproduktion.

Die in Fig. 57 dargestellten Kurven für die Asymmetrien für das σ -Meson unterscheiden sich von den Voraussagen von BARTL und MAJEROTTO [5], und zwar quantitativ im Fall der Asymmetrie für polarisierte Leptonen (L) und für in x-Richtung polarisierte Targetnukleonen ($T_x^{(2)}$), qualitativ - im Vorzeichen - dagegen bei in y-Richtung polarisierten Nukleonen ($T_y^{(1)}$) sowie bei polarisierten Leptonen und polarisierten Targetnukleonen ($L_x^{(2)}$).

7. Zusammenfassung

Ausgehend von der Dreiecksnäherung für die hadronischen Vertizes, die üblicherweise zur Beschreibung von Vertizes zusammengesetzter Teilchen verwendet wird, und von Näherungsansätzen für die hadronischen Vertex-Funktionen in den Dreiecksdiagrammen sowie für die Photon-Hadron-Vertex-Funktionen wurde ein eichinvariantes Modell für die π^+ -Photo- und Elektroproduktion entwickelt. Es wurden Konsistenzbetrachtungen für die Näherungsansätze für die Vertex-Funktionen und ein Vergleich der von diesen Ansätzen abgeleiteten Formfaktoren mit experimentell bekannten angestellt. Der Zusammenhang zwischen dem VDM und dem Näherungsansatz für die Photon-Hadron-Vertex-Funktion wurde untersucht. Für die Berechnung von Helizitätsamplituden und Partialwellenentwicklungskoeffizienten in geschlossener Form wurde ein spezielles Rechenverfahren entwickelt. Wirkungsquerschnitte und Asymmetrien für die π^+ -Photo- und Elektroproduktion wurden für den Energiebereich um 2 GeV berechnet und mit experimentellen Werten verglichen.

Ziel der Arbeit war es, zu untersuchen, ob mit einem eichinvarianten Modell, das nur wenige Parameter als Ausgangsgröße benötigt, sowohl die Photo- als auch die Elektroproduktion besser als mit dem bezüglich der Zahl der Parameter vergleichbaren BTM beschrieben werden können. Es zeigt sich, daß dies bei Verwendung einer Näherung für die Meson-Nukleon-Vertizes, die die wesentlichen Züge eines Vertex für zusammengesetzte Teilchen trägt, der Fall ist, wenn man für die Meson-Nukleon-Kopplungskonstanten bzw. für die Massen der Mesonen Werte einsetzt, die in der Größenordnung der experimentell bekannten liegen.

Zu der besten Übereinstimmung mit den Daten der Photo- und Elektroproduktion im Bereich $-t_{\min} \leq -t \leq 0.4 \text{ (GeV/c)}^2$ für $k^2 = -.26, -.55, -.75 \text{ (GeV/c)}^2$ führte der aus dem Dreiecksdiagramm mit nur einem skalaren Meson von ungefähr 500 MeV abgeleitete Beitrag zur Pion-Produktionsamplitude. Die Beiträge, die zu den Dreiecksdiagrammen mit nur einem inneren Meson gehören, können bei verschiedenem Isospin des inneren Mesonen destruktiv miteinander interferieren, wenn die Nukleon-Kopplungskonstanten für diese Mesonen geeignete Werte besitzen; dabei

wirken die einzelnen Beiträge aufeinander wie Absorptionskorrekturen. Der Interferenzbeitrag mehrerer Mesonen kann sich sowohl bezüglich des t -Verhaltens als auch der Größenordnung wesentlich von dem der Einzelbeiträge unterscheiden. Es konnte gezeigt werden, daß bei Interferenz mehrerer Mesonen eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment erzielt werden kann, auch wenn die Einzelbeiträge nicht die Daten beschreiben können.

Es wurde versucht, über das Hochenergieverhalten der invarianten Amplituden der verschiedenen Graphen Kriterien für deren physikalische Zuordnung zu finden. Durch Vergleich der s -Abhängigkeit von Verhältnissen invarianter Amplituden der Graphen des Modells mit denen von t -Kanal-Austausch-Graphen des BTM zeigte sich, daß die Boxgraphen mit nur einem inneren Meson im Falle von skalaren bzw. pseudoskalaren Mesonen ein ähnliches Verhalten haben wie der t -Kanal-Austausch von Vektormesonen. Nur für die skalaren Teilchen ergibt sich eine Verbindung zum ρ -Austausch im t -Kanal, der allein bei der π^+ -Photo- und Elektroproduktion als t -Kanal - Vektormeson-Austausch mit einer Masse um 900 MeV in Frage kommt. Für das anomale magnetische Moment μ_N des Nukleons bezüglich der Ankopplung des ρ -Mesons findet man $\mu_N \approx 2$, wenn man das σ -Meson in den Boxgraphen einsetzt.

Die Ergebnisse für die beiden verwendeten Ansätze für die Hadron-Hadron-Vertex-Funktionen unterscheiden sich nicht wesentlich voneinander, da die Dreiecksnäherung für die Vertizes deren Abfallverhalten bereits weitgehend bestimmt. Bei den Rechnungen stellte sich heraus, daß hauptsächlich die Graphen der Fig. 20 bzw. 21 mit dem t -Kanal-Austausch eines Pions die schlechtere Übereinstimmung mit den Daten für $-t \geq 0.4 \text{ (GeV/c)}^2$ bewirken, da durch die im Dreiecksdiagramm verwendete Näherung für die Vertex-Funktion der 1-Teilchen-Austausch-Charakter dieser Graphen für $-t \geq 0.4 \text{ (GeV/c)}^2$ noch nicht genügend verändert wird.

Literaturverzeichnis

- [1] A. Donnachie: Photo- and Electroproduction Processes
in E.H.S.Burhop: High Energy Physics, Vol.V,
Academic Press, New York, 1972
- [2] G. Kramer, Fortschr.d.Phys. 19 (1971) 725
- [3] J. Froyland, High Energy Photoproduction of Pseudoscalar
Mesons, CERN-preprint TH 1433 (Nov. 1971) und
Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 63, Berlin 1972, 1-30
- [4] R. Worden, Nucl.Phys. B37 (1972) 253
- [5] A. Bartl, W. Majerotto, DESY 73/9 (1973);
Nucl.Phys. B62 (1973) 267
- [6] H. Burfeindt et al., Phys.Letters 33B (1970) 509
- [7] P. Joos: Compilation of Photoproduction Data above 1.2 GeV
DESY-HERA 70-1 (Sept.1970)
- [8a] C. Driver et al., Phys.Letters 35B (1971) 77, ibd. 81;
[8b] Nucl.Phys. B30 (1971) 245
- [9] C.N. Brown et al., Phys.Rev.Lett. 26 (1971) 987, ibd. 991
- [10] P.S. Kummer et al., Lett.Nuovo Cimento 1 (1971) 1026
- [11] G. Buschhorn et al., Phys.Rev.Letters 17 (1966) 1027;
ibd. 18 (1967) 571
- [12] C. Geweniger et al., Phys.Letters 29B (1969) 41
- [13] Z. Bar - Yam et al., Phys.Rev.Letters 25 (1970) 1053
- [14] R.F. Schwitters et al., Phys.Rev.Letters 27 (1971) 120
- [15] M. Borghini et al., Phys.Rev.Letters 25 (1970) 835
- [16] H. Genzel et al., Nucl.Phys. B92 (1975) 196
- [17] R.C.E. Devenish, D.H. Lyth, Phys.Rev. D5 (1972) 47;
• I.M. Barbour, P.L. Crawford: An analysis of Single Pion Photo-
production at High and Low Energies, Univers.of Glasgow, 1975

- [18] A. Dar, T.L. Watts, V.F. Weisskopf, Nucl.Phys. B13 (1969) 477;
A. Dar, Ann.Phys. (NY) 69 (1972) 1
- [19] P.K. Williams, Phys. Rev. D1 (1970) 1312
- [20] J.J. Sakurai, Proc. 4th Intern.Symp. on electron and photon interactions at high energies, Liverpool, 1969, p.91, sowie die dort aufgeführten Referenzen
- [21] H. Fraas, D. Schildknecht, Phys.Letters 35B (1971) 72
- [22] B.H. Kellet, Nucl. Phys. B38 (1972) 573
- [23] A. Actor, J.G. Körner, I. Bender, Nuovo Cimento 24A (1974) 369
- [24] F. Gutbrod, G. Kramer, Nucl.Phys. B49 (1972) 461
- [25] F. Gutbrod, D. Simon, Nuovo Cimento 51A (1967) 602
- [26] S. Mandelstam, Proc. Roy.Soc. A233 (1955) 248;
K. Nishijima, Progr.Theoret.Phys. 10 (1953) 549; ibd. 12 (1954) 279;
ibd. 13 (1955) 305
- [27] K. Symanzik, J.Math.Phys. 1 (1960) 249
- [28] M. Ciafaloni, P. Menotti, Nuovo Cimento 46A (1966) 162;
Phys.Rev. 173 (1968) 1575;
D. Amati et al., Phys.Letters 27B (1968) 38;
J.S. Ball, F. Zachariasen, Phys.Rev. 170 (1968) 1541;
M. Böhm, H. Joos, M. Krammer, Nuovo Cimento 7A (1972) 21
- [29] E.E. Salpeter, H.A. Bethe, Phys.Rev. 84 (1951) 1232
- [30] I.S. Gerstein, N.G. Deshpande, Phys.Rev. 140 (1965) B 1643;
K. Hagashi et al., Fortschr.d.Phys. 15 (1967) 625
- [31] G.F. Chew, S. Mandelstam, Nuovo Cimento 19 (1961) 752;
G.F. Chew, The Analytic S-Matrix, Benjamin Inc., New York-Amsterdam, 1966
- [32] W. Zimmermann, Nuovo Cimento 10 (1958) 597
- [33] N. Nakanishi, Progr.Theor.Phys. 25 (1960) 1296;
weitere Integraldarstellungen findet man bei:
S.Deser, W. Gilbert, E.C.G. Sudarshan, Phys.Rev. 115 (1959) 731;
M. Ida, Progr.Theor.Phys. 23 (1960) 1151

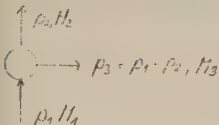
- [34] N. Nakanishi, Progr.Theor.Phys. 24 (1960) 1275
- [35] Y. Nambu, Phys.Rev. 100 (1955) 394
- [36] J.C. Ward, Phys.Rev. 77 (1950) 2931
- [37] Y. Takahashi, Nuovo Cimento 6 (1957) 371
- [38] R. Feynman, Phys. Rev. 76 (1949) 769
- [39] W. Pauli, F. Villars, Rev.Mod. Phys. 21 (1949) 434
- [40] N.M. Kroll, T.D. Lee, B. Zumino, Phys.Rev. 157 (1967) 1376
- [41] E. Ferrari, F. Selleri, Nuovo Cimento 27 (1963) 1450
- [42] P.H. Frampton, Phys.Rev. 136 (1969) 1419;
Phys.Rev. D1 (1970) 3141
- [43] E. Kazes, Nuovo Cimento 13 (1959) 1226
- [44] K. Nishijima, Phys.Rev. 119 (1960) 485
- [45] H. Pilkuhn et al., Nucl.Phys. B65 (1973) 460
- [46] M. Jacob, G.C. Wick, Ann.Phys. (NY) 7 (1959) 404
- [47] A.C. Hearn, REDUCE 2, User's Manual,
University of Utah, Salt Lake City, UCP 19/March 1973
- [48] A.R. Edmonds: Drehimpulse in der Quantenmechanik,
Hochschultaschenbuch 53/53a, Bibliogr.Inst. Mannheim 1964
- [49] G. Szegő, Orthogonal Polynomials, Amer.Math.Soc.,
Colloqu.Publications Vol. XXIII, New York, 1959
- [50] A. Erdelyi, Higher Transcendental Functions, Vol. II,
Mc Graw-Hill, New York, 1953
- [51] F. Gutbrod, DESY preprint 71/45 sowie Phys.Rev. D6 (1972) 3631
- [52] Lehrbücher für Angewandte Mathematik, wie z.B.
V.I. Krylov: Approximate Calculation of Integrals,
Macmillan Company, New York, London, 1962
- [53] G.C. Wick, Phys.Rev. 96 (1954) 1124
- [54] F. Gutbrod, Private Mitteilung
- [55] J.D. Bjorken, S.D. Drell: Relativistische Quantenmechanik,
Hochschultaschenbuch 98/98a, Bibliogr.Inst. Mannheim 1966
- [56] J.S. Ball, Phys.Rev. 124 (1961) 2014

Anhang 1

Definitionen verwendeter Größen

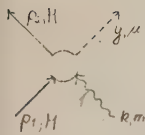
1.1. Kinematik

1.1.1. Meson-Nukleon- und 3-Mesonen-Vertizes



$$\begin{aligned}
 s &= (p_1 - p_2)^2 \\
 p_1^2 &= m_1^2 \quad *) \\
 p_2^2 &= m_2^2 \\
 \vec{p}_1 &= -(0, 0, p_1) \quad \vec{p}_2 = -(\underline{p}_2 \sin \vartheta \cos \varphi, \underline{p}_2 \sin \vartheta \sin \varphi, \underline{p}_2 \cos \vartheta)
 \end{aligned}$$

1.1.2. Pion-Photo- und Elektroproduktion



$$\begin{aligned}
 s &= (p_1 + k)^2 & u &= p_1 \cdot k \\
 t &= (p_1 \cdot p_2)^2 \\
 u &= (p_1 - q)^2 \\
 m &= \sqrt{16\pi^2}
 \end{aligned}$$

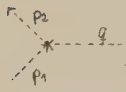
CMS $w = (w, 0)$

$$\begin{aligned}
 \vec{k} &= (0, 0, k) & \vec{q} &= (q \sin \vartheta \cos \varphi, q \sin \vartheta \sin \varphi, q \cos \vartheta) \\
 \vec{p}_1 &= -\vec{k} & \vec{p}_2 &= -\vec{q}
 \end{aligned}$$

*) Die Metrik ist: $a \cdot b = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$

1.2. Feynman-Regeln

Es werden die bei BJORKEN und DRELL [55] üblichen Feynman-Regeln verwendet. Ergänzend sei hier noch die Regel für den 3-Mesonen-Vertex angegeben:



3 skalare Teilchen: $g f^4 (p_2 - p_1 - q)$

1 skalares
+ 2 pseudoskalare Teilchen: $g \mu \delta^4 (p_2 - p_1 - q)$

μ = Masse des skalaren Teilchens

1.3. Dirac-Matrizen, Spinoren, Isospinvektoren

Es werden die folgenden Konventionen für die Dirac-Matrizen, Spinoren und Isospinvektoren benutzt:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes 1$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(p, s) u(p, s) = 2M \quad p^2 = M^2$$

$$\sum_{s=\pm 1/2} u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + M$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Phi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.4. Allgemeine Bezeichnungen

1.4.1. Isospin

Ist Y das Meson am Meson-Nukleon-Vertex bzw. das erzeugte Meson der Photo- und Elektroproduktion und

Λ_1 = Isospin-Vektor des einlaufenden Nukleons

Λ_2 = Isospin-Vektor des auslaufenden Nukleons

$\vec{\Phi}$ = Isospin-Vektor von Y ,

dann soll sein

$$T = \begin{cases} \vec{\Sigma} \cdot \vec{\Phi}^+ & \text{falls } Y \text{ Isovektorteilchen} \\ 1 & \text{falls } Y \text{ isoskalares Teilchen.} \end{cases}$$

$$\tilde{Y}_1 = \Lambda_1^+ \tau_3 \Lambda_1$$

$$\tilde{Y}_2 = \Lambda_2^+ \tau_3 \Lambda_2$$

$$\tilde{Y} = \vec{\Phi}^+ \tau_3 \vec{\Phi}$$

Aus der Ladungserhaltung folgt:

$$\frac{1}{2} (\tilde{Y}_1 - \tilde{Y}_2) = \tilde{Y}$$

1.4.2. Kinematik

Für die Impulse $b_1, \dots, b_4$ werden die folgenden Definitionen verwendet:

$$b_2 = (b_{20}, \vec{b}_2) \quad \underline{b}_2 = |\vec{b}_2|$$

$$b_1 = p_1 - b_2$$

$$b_3 = p_2 - b_2$$

$$b_4 = w - b_2$$

Als Konstanten werden verwendet:

$$N_1 = \sqrt{(\rho_{10} + H)(\rho_{20} + H)}$$

$$N_2 = \sqrt{(\rho_{10} - H)(\rho_{20} - H)}$$

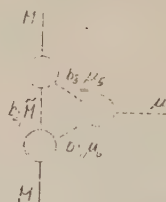
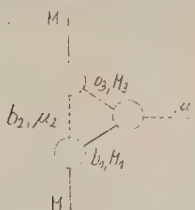
$$N_3 = \sqrt{(\rho_{10} + H)(\rho_{20} + H)}$$

$$N_4 = \sqrt{(\rho_{10} + H)(\rho_{20} + H)}$$

$$N_5 = \frac{N_3}{k^2}$$

$$N_6 = \frac{N_4}{k^2}$$

Für die Bezeichnungen der Massen in den Dreiecksgraphen gelten die Definitionen:



$$M_1^{(n)} = M_1 \quad \mu_6^{(n)} = \mu_6$$

$$M_3^{(n)} = M_3 \quad \mu_5^{(n)} = \mu_5$$

$M_i^{(2)}$ = Masse des Zwischenteilchens (Nukleon) für die Linie mit dem Nukleon der Masse $M_i^{(1)}$, $i = 1, 3$

$\mu_i^{(2)}$ = Masse des Zwischenteilchens (Meson) für die Linie mit dem Meson der Masse $\mu_i^{(1)}$, $i = 5, 6$

$$m_j^{(n)} = \lambda_x M_j^{(n)} - M^* \quad \begin{matrix} j = 1, 2 \\ j = 1, 3 \end{matrix}$$

*) λ_x wird in den einzelnen Abschnitten von Anhang 7 definiert

Definition von Z_1 und Z_2 :

Born-Term-Modell

$$Z_1 = \frac{(k_0 - q_0)^2 - k^2 - q^2 - M^2}{2 k q}$$

$$Z_2 = \frac{(p_{20} - k_0)^2 - k^2 - q^2 - M^2}{2 k q}$$

Modell mit zusammengesetzten Hadronen

$$Z_1 = \frac{(b_{20} - p_{10})^2 - b_2^2 - k^2 - \bar{M}_1^2}{2 k b_2}$$

$$Z_2 = \frac{(b_{20} - p_{20})^2 - b_2^2 - q^2 - \bar{M}_3^2}{2 q b_2}$$

Definition der $\tilde{B}_{kl}^{(m)}$ und $\tilde{F}_{kl}^m$:

$$\tilde{B}_{kl}^{(m)} = -i \sum_{i=1}^{n_1+1} \sum_{j=1}^{n_2+1} (-1)^{i+j} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty d\underline{b_2} \int_{-\infty}^\infty d b_{20} \left\{ \frac{\tilde{B}_{kl}^{(m)}}{(b_2^2 - \bar{M}_1^{(1)2} + i\varepsilon)^{n_1} (b_2^2 - \bar{M}_1^{(2)2} + i\varepsilon)^{n_2} (b_2^2 - \bar{M}_3^2 + i\varepsilon)^{n_3} (b_4^2 - \bar{M}_4^2 + i\varepsilon)^{n_4}} \right\}$$

$$n_1, n_2, n_3 = 0, 1$$

$$m_1 = m_4^{(i)}$$

$$m_3 = m_5^{(j)}$$

$$\bar{M}_1 = \bar{M}_1^{(i)}$$

$$\bar{M}_3 = \bar{M}_3^{(j)}$$

$$\tilde{F}_{kl}^m = -i \int_0^\infty d\underline{b_2} \int_{-\infty}^\infty d b_{20} F_{kl}^m$$

1.4.3. Abkürzungen

PS = Pseudoskalar Teilchen

S = Skalar Teilchen

V = Vektorteilchen

PV = Pseudovektorteilchen

IS = Isoskalar Teilchen

IV = Isovektorteilchen

1.5. Formfaktoren

1.5.1. Born-Term-Modell

$$F_1' = \frac{1}{2} (F_1^S + \xi_1 F_1^V)$$

$$F_1'' = \frac{1}{2} (F_1^S + \xi_2 F_1^V)$$

$$F_2' = \frac{1}{2} (F_2^S + \xi_1 F_2^V)$$

$$F_2'' = \frac{1}{2} (F_2^S + \xi_2 F_2^V)$$

$$F_1^{S,V} = \left(1 - \frac{\mu^{S,V} z}{1 - z}\right) G_P^e$$

$$F_2^{S,V} = \frac{\mu^{S,V}}{2M} \frac{G_P^e}{1 - z}$$

$$G_P^e = \left(1 - \frac{K^2}{Q^2 M_{GeV}^2}\right)^2$$

$$z = \frac{k^2}{11H^2}$$

$$\mu^S = 0,12 \quad \mu^V = 3,7$$

$$F_{II}^V = \frac{1}{1 - \frac{K^2}{m_\rho^2 z}}$$

1.5.2. Modell mit zusammengesetzten Hadronen

Nukleon-Formfaktoren

Isoskalarer und isovektorieller Nukleon-Formfaktor (elektrisch):

$$F_1^S \equiv F_1^S(k^2) = \frac{1}{1 - \frac{k^2}{m_N^2}}$$

$$F_1^V \equiv F_1^V(k^2) = F_1^S(k^2)$$

Formfaktoren für Boxgraph und s-Kanal-Austauschgraph

$$F_1^{\prime} = \frac{1}{2} \left[-F_1^S + (\xi_1 + \xi_2) F_1^V \right]$$

$$F_1^{\prime\prime} = \frac{1}{2} (F_1^S + \xi_1 F_1^V)$$

Pion-Formfaktor

$$F_{\pi}^V \equiv F_{\pi}^V(k^2) = \frac{1}{1 - \frac{k^2}{m_{\pi}^2}}$$

1.6. Mathematische Definitionen

$$DE_{\alpha}^{ijk}(z) = \begin{cases} D_{jk}^i(z) \cdot E_{jk}^i(z) & i \leq j \\ D_{jk}^j(z) \cdot E_{jk}^i(z) & i \geq j \end{cases}$$

$$D_{m'm}^j(x) = \frac{\sqrt{(j+m)! (j-m)!}}{(j+m)! (j-m)!} \left(\frac{1+x}{2} \right)^{\frac{j+m}{2}} \left(\frac{1-x}{2} \right)^{\frac{j-m}{2}} P_{j-m}^{(m-m, m'+m)}(x)$$

$$E_{m'm}^j(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1+z}{2} \right)^{\frac{j+m}{2}} \left(\frac{1-z}{2} \right)^{\frac{j-m}{2}} \int dx \frac{1}{z-x} \left(\frac{1+x}{2} \right)^{\frac{j+m}{2}} \left(\frac{1-x}{2} \right)^{\frac{j-m}{2}} D_{m'm}^j(x)$$

Speziell gilt:

$$D_{00}^j(x) \equiv P_j^j(x)$$

$$E_{00}^j(z) \equiv Q_j^j(z)$$

$P_1^{(\alpha, \beta)}(x)$ ist ein Jakobi-Polynom:

$$P_L^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right]$$

$$= 2^{-n} \cdot \sum_{v=0}^n \binom{n+\alpha}{v} \binom{n+\beta}{n-v} (x-1)^{n-v} (x+1)^v$$

Oft wird anstelle der Funktion $D_{m'm}^j(x)$ die Funktion $d_{m'm}^j(\beta)$ verwendet mit $x = \cos \beta$:

$$D_{m'm}^j(x) \equiv d_{m'm}^j(\beta)$$

Die Funktionen $D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma)$ sind folgendermaßen definiert:

$$D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma) = e^{im\alpha} d_{m'm}^j(\beta) e^{im\gamma}$$

Da die D -Funktionen für $j = 1/2$ in dieser Arbeit häufig benötigt werden, sollen sie hier angegeben werden für $\alpha = -\gamma = \varphi$, $\beta = \vartheta$:

$$D_{-1/2, -1/2}^{1/2}(\varphi, \vartheta, -\varphi) = \cos \frac{\vartheta}{2} \quad D_{-1/2, 1/2}^{1/2}(\varphi, \vartheta, -\varphi) = -e^{-i\varphi} \sin \frac{\vartheta}{2}$$

$$D_{1/2, -1/2}^{1/2}(\varphi, \vartheta, -\varphi) = e^{i\varphi} \sin \frac{\vartheta}{2} \quad D_{1/2, 1/2}^{1/2}(\varphi, \vartheta, -\varphi) = \cos \frac{\vartheta}{2}$$

Es gelten für die D -Funktion die folgenden Additionstherme [48]:

$$a) D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma) = \sum_{m_1 m_2} D_{m'm_1}^j(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1) D_{m_1 m_2}^j(\alpha_2 \beta_2 \gamma_2) D_{m_2 m}^j(\alpha_3 \beta_3 \gamma_3)$$

Hierbei wird zuerst die Drehung um die Winkel $(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1)$ und dann die Drehung um die Winkel $(\alpha_2 \beta_2 \gamma_2)$ ausgeführt:

$$(\alpha \beta \gamma) = (\alpha_2 \beta_2 \gamma_2) \cdot (\alpha_1 \beta_1 \gamma_1)$$

b)

$$\begin{aligned}
 & D_{m_1 m_2}^{j_1 j_2}(\alpha \beta \gamma) D_{m_2' m_2'}^{j_2' j_2'}(\alpha \beta \gamma) \\
 &= \sum_{j_1' j_2' j_2'} (j_1 m_1 j_2 m_2 / j_1 j_2 j_1' m_1' + m_2') (j_1' m_1' j_2' m_2' / j_1' j_2' j_2 m_2) \\
 & \quad \cdot D_{m_1' m_2' m_1' m_2'}^{j_1' j_2' j_2 j_2}(\alpha \beta \gamma)
 \end{aligned}$$

Dabei ist $(j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j_1' m_1' + m_2')$ ein (reeller) Clebsch-Gordan-Koeffizient.

1.7. Definition der Helizitätsamplituden, Wirkungsquerschnitte und Asymmetrien

Es ist $T_{fi}(s_2, s_1, \lambda)$ die Helizitätsamplitude für die Pion-Photo- und Elektroproduktion, wobei s_1 und s_2 die Helizität des ein- und auslaufenden Nukleons und λ die Helizität des Photons ist. Die Definition für die Amplitude $f_{s_2, s_1, \lambda}$ ist dann

$$T_{fi}(s_2, s_1, \lambda) = e^{i\phi(s_2 - \lambda - s_1)} f_{s_2, s_1, \lambda}$$

Es ist üblich, die folgenden Linearkombinationen aus den $f_{s_2, s_1, \lambda}$ zu bilden:

$$h_{\pm}^N = \frac{1}{2} \sqrt{2} (f_{++\pm} \pm f_{--\pm})$$

$$h_{\pm}^F = \frac{1}{2} \sqrt{2} (f_{+-\pm} \mp f_{-+\pm})$$

$$h_0^N = f_{+00}$$

$$h_0^F = f_{-+0}$$

wobei $h_{\pm}^{N,F}$ die Amplituden für senkrecht und $h_{\pm}^{N,F}$ die für parallel zur Streuebene polarisierte Photonen sind. Die Indizes F und N beziehen sich auf "Spin-Flip" und "Spin-Non-Flip" für die Baryonen.

Die Definitionen für die verschiedenen Wirkungsquerschnitte lauten dann:

$$\sigma_u = \frac{1}{2} c (|f_{++}|^2 + |f_{+-}|^2 + |f_{-+}|^2 + |f_{--}|^2)$$

$$\sigma_s = c (|f_{++}|^2 + |f_{+-}|^2)$$

$$\sigma_T = -c \operatorname{Re} (f_{++} f_{--}^* - f_{+-} f_{-+}^*)$$

$$\sigma_I = -\frac{1}{2} \sqrt{2} c \operatorname{Re} [f_{++}^* (f_{++} - f_{--}) + (f_{+-}^* (f_{+-} + f_{-+}))]$$

$$\text{wobei } c = \frac{1}{32 \pi \omega_k (\text{s-M}^2)} \text{ ist.}$$

Die Asymmetrien sind folgendermaßen definiert:

Photoproduktion

$$\sum = \frac{\sigma_T}{\sigma_u} = \frac{\sigma_{II} - \sigma_{\perp}}{\sigma_{II} + \sigma_{\perp}}$$

$$T = 2 \frac{\operatorname{Im} (f_{+-}^* f_{++} - f_{--} f_{-+}^*)}{|f_{++}|^2 + |f_{+-}|^2 + |f_{-+}|^2 + |f_{--}|^2}$$

Elektroproduktion

$$L = -2 \sqrt{2 \varepsilon (1-\varepsilon)} \operatorname{Im} (h_0^N h_-^{N*} + h_0^F h_-^{F*}) / N(90^\circ)$$

$$T_x^{(2)} = [-2 \sqrt{\varepsilon (1+\varepsilon)} \operatorname{Im} (h_0^F h_+^{N*} + h_0^N h_+^{F*}) - 2 \varepsilon \operatorname{Im} (h_-^F h_+^{N*} + h_-^N h_+^{F*})] / N(45^\circ)$$

$$T_y^{(1)} = -2 [\operatorname{Im} (h_+^N h_+^{F*} + h_-^N h_-^{F*}) + 2 \varepsilon \operatorname{Im} (h_0^N h_0^{F*})] / N$$

$$L_x^{(2)} = [2 \sqrt{1-\varepsilon^2} \operatorname{Re} (h_-^F h_-^{N*} + h_-^N h_-^{F*}), 2 \sqrt{2 \varepsilon (1-\varepsilon)} \operatorname{Re} (h_0^F h_+^{N*} + h_0^N h_+^{F*})] / N(0^\circ)$$

Für die Asymmetrien der Elektroproduktion [5] werden noch die folgenden Definitionen benötigt:

$$N = |h_+^N|^2 + |h_-^F|^2 + |h_-^N|^2 + |h_-^F|^2 + 2 \varepsilon (|h_0^N|^2 + |h_0^F|^2)$$

$$N(0^\circ) = 2N - N(90^\circ) + 2 \sqrt{2 \varepsilon (1+\varepsilon)} \operatorname{Re} (h_0^N h_-^{N*} + h_0^F h_-^{F*})$$

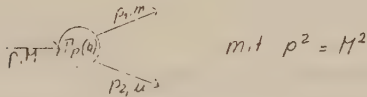
$$N(45^\circ) = N + 2 \sqrt{\varepsilon (1+\varepsilon)} \operatorname{Re} (h_0^N h_-^{N*} + h_0^F h_-^{F*})$$

$$N(90^\circ) = N - \varepsilon (|h_-^N|^2 + |h_-^F|^2 - |h_+^N|^2 - |h_+^F|^2)$$

Anhang 2

Ein Lösungsansatz für die Bethe-Salpeter-Vertex-Funktion für Spin 0-Teilchen

Im folgenden wird für die Bethe-Salpeter-(BS)-Vertex-Funktion $\Gamma_p(k)$ eine Lösung hergeleitet für den Prozeß:



Dabei werden die folgenden Definitionen verwendet:

$$p = p_1 + p_2 \quad \eta_1 = \frac{m}{m + \mu} \quad \eta_1 + \eta_2 = 1$$

$$k = \eta_2 p_1 - \eta_1 p_2 \quad \eta_2 = \frac{\mu}{m + \mu}$$

$$p^2 = H^2$$

$$p_1 = \eta_1 p + k \quad p_1' = \eta_1 p + k'$$

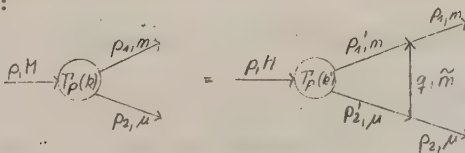
$$p_2 = \eta_2 p - k \quad p_2' = \eta_2 p - k'$$

$$q = k - k'$$

Ferner ist g_1 die Kopplungskonstante für den Vertex mit den Teilchen der Masse m , m , $\tilde{m}$ und g_2 die Kopplungskonstante für den Vertex mit den Teilchen μ , μ , $\tilde{m}$.

Graphisch ausgedrückt lautet die BS-Gleichung für die Vertexfunktion

$\Gamma_p(k)$:



und in Formeln:

$$T_p(k) = i \frac{g_1 g_2}{(2\pi)^4} \cdot \int d^4 k' \frac{1}{q^2 + \tilde{m}^2 + i\epsilon} \frac{1}{p_1'^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{p_2'^2 - \mu^2 + i\epsilon} T_p(k') \quad (\text{A 2.1})$$

Die Behauptung ist nun, daß unter den Voraussetzungen

$$1. \tilde{m} = 0$$

$$2. 0 < (\mu'^2 - \mu^2) \ll \mu^2 \ll m^2 \approx M^2$$

der folgende Ansatz eine Lösung von Gl.(A 1) ist:

$$T_p(k) = \frac{\mu^2 - \mu'^2}{p_2'^2 - \mu'^2 + i\epsilon} \quad (\text{A 2.2.})$$

wobei das Produkt der Koppplungskonstanten gegeben ist durch die Beziehung:

$$g_1 g_2 = 32 \pi M_\mu \quad (\text{A 2.3.})$$

Setzt man den Ansatz (A 2.2) in die Integralgleichung (A 2.1) ein, so erhält man die folgende Beziehung:

$$T_p(k) = i \frac{g_1 g_2}{(2\pi)^4} \cdot \int d^4 k' \frac{1}{(k'-k)^2 + i\epsilon} \frac{1}{p_1'^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{p_2'^2 - \mu'^2 + i\epsilon} \frac{\mu^2 - \mu'^2}{p_2'^2 - \mu'^2 + i\epsilon}$$

Mit der Voraussetzung $\mu'^2 - \mu^2 \ll \mu^2$ läßt sich diese Gleichung umformen in:

$$T_p(k) = i \frac{g_1 g_2}{(2\pi)^4} \int d^4 k' \frac{1}{(k'-k)^2 + i\epsilon} \frac{1}{p_1'^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{\mu^2 - \mu'^2}{(p_2'^2 - \mu'^2 + i\epsilon)^2}$$

Durch Einführen von Feynman-Integralen und Ausführen der Impulsintegration erhält man:

$$T_p(k) = \frac{g_1 g_2}{16\pi^2} (\mu'^2 - \mu^2) \int_0^1 dx (1-x) \int_0^1 dy \frac{1}{(ay+b)^2}$$

mit

$$ay+b = M^2 y [(1-x)\eta_2 - x\eta_1]^2 + 2p \cdot k (1-y) [(1-x)\eta_2 - x\eta_1] - (1-y) k^2 - M^2 [\eta_1^2 x + (1-x)\eta_2^2] + m^2 x + (1-x)\mu^2$$

Das Ausführen der Integration über y ergibt

$$T_P(k) = \frac{g_1 g_2}{16 H^2} (\mu'^2 - \mu^2) \int_0^1 dx (1-x) \frac{1}{(a+b)b}$$

$$\text{mit } a+b = (ay+b) \Big|_{y=1}$$

$$= H^2 [(1-x)\eta_2 - x\eta_1]^2 - H^2 [\eta_1^2 x + (1-x)\eta_2^2] + m^2 x + (1-x)\mu^2$$

$$\text{und } b = (ay+b) \Big|_{y=0}$$

$$= 2 p \cdot b [(1-x)\eta_2 - x\eta_1] - k^2 - H^2 [\eta_1^2 x + (1-x)\eta_2^2] + m^2 x + (1-x)\mu^2$$

Da nach Voraussetzung

$$\eta_1 \approx 1, \eta_2 \ll 1 \text{ und } H^2 \ll m^2 \text{ ist, gilt}$$

$$a+b \approx H^2 x^2 + (1-x)\mu^2$$

Da für $\frac{\mu^2}{M^2} \ll 1$ der Integrand der x-Integration wegen des Faktors

$$\frac{1}{H^2 x^2 + (1-x)\mu^2}$$

nur für $x \rightarrow 0^+$ wesentlich zum Integral beiträgt und für $x > 0$ der Integrand um den Faktor $\frac{\mu^2}{M^2}$ kleiner ist, wird die folgende Substitution vorgenommen:

$$\frac{1}{H^2 x^2 + (1-x)\mu^2} = \delta(x) \int_0^1 dx \frac{1}{H^2 x^2 + (1-x)\mu^2} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{H\mu} \delta(x)$$

Dann erhält man für $T_P(k)$:

$$\begin{aligned} T_P(k) &= \frac{g_1 g_2}{16 H^2} (\mu'^2 - \mu^2) \frac{1}{2} \frac{\pi}{H\mu} \frac{1}{2 p \cdot k \eta_2 - k^2 - H^2 \eta_1^2 + \mu^2 + i \epsilon} \\ &= \frac{g_1 g_2}{32 \pi H\mu} \frac{\mu'^2 - \mu^2}{p_2^2 - \mu'^2 + i \epsilon} \approx \frac{g_1 g_2}{32 \pi H\mu} \frac{\mu'^2 - \mu^2}{p_2^2 - \mu'^2 + i \epsilon} \end{aligned}$$

$$T_P(k) = \frac{\mu'^2 - \mu^2}{p_2^2 - \mu'^2 + i \epsilon}$$

ist also unter der Voraussetzung

$\tilde{m} = 0$ und $0 < \mu'^2 - \mu^2 \ll \mu'^2 \ll m^2 \ll M^2$ eine Lösung der Integralgleichung

(A 1.1) mit dem Eigenwert $g_1 g_2 = 32 \pi H\mu$.

$$T_P(k) = \frac{\mu'^2 - \mu^2}{p_2^2 - \mu'^2 + i \epsilon}$$

stellt bis auf eine Konstante den Propagator

für ein Teilchen der Masse μ' dar.

Man kommt also zu dem gleichen Ergebnis wie in Abschn. 2.2., in dem gezeigt wird, daß ein Propagator mit einer anderen Masse als der des externen Teilchens an einer Linie des Vertex die Integralgleichung für die BS-Vertex-Funktion erfüllt.

Anhang 3

Die Grundelemente für den Algorithmus zur Berechnung der Helizitätsamplituden und Partialwellenentwicklungskoeffizienten

1. Helizitätsdarstellung für Spinoren, $\chi(k, \lambda)$ und $\chi^*(k, \lambda)$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} p &= (p_0, \vec{p}) & k &= (k_0, \vec{k}) \\ p &= |\vec{p}| & \underline{k} &= |\vec{k}| \\ \vec{p} &= p \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} & \vec{k} &= \eta \vec{p} & \eta &= \pm 1 \\ p^2 &= m^2 & k^2 &= M^2 \\ \epsilon &= \begin{cases} 1, \text{ falls } M^2 \neq 0 \\ \text{sign}(k_0), \text{ falls } M^2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

gelten die folgenden Darstellungen:

a) Spinoren

Mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} u(k, s) &= \begin{pmatrix} k_0 + M \\ 2s \sqrt{k_0^2 - M^2} \end{pmatrix} \\ \chi_s^p &= \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{1/2, s}^{1/2}(\varphi, \vartheta, -\varphi) \\ \mathcal{D}_{1/2, s}^{1/2}(\varphi, \vartheta, -\varphi) \end{pmatrix} & \chi_s^k &= \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{1/2, -\eta s}^{1/2}(\varphi, \vartheta, -\varphi) \\ \mathcal{D}_{1/2, -\eta s}^{1/2}(\varphi, \vartheta, -\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gilt für die Spinoren

$$\begin{aligned} \chi(k, s) &= \frac{1}{\sqrt{k_0 + M}} u(k, s) \otimes \chi_{\eta s}^p = \left(\frac{\sqrt{k_0 + M}}{2s \sqrt{k_0^2 - M^2}} \right) \otimes \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{1/2, -\eta s}^{1/2}(\varphi, \vartheta, -\varphi) \\ \mathcal{D}_{1/2, -\eta s}^{1/2}(\varphi, \vartheta, -\varphi) \end{pmatrix} \\ \chi(k, s) &= u^+(k, s) \gamma_0 = \left(\sqrt{k_0 + M}, -2s \sqrt{k_0^2 - M^2} \right) \otimes \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{-1/2, \eta s}^{1/2}(\varphi, \vartheta, -\varphi) \\ \mathcal{D}_{1/2, \eta s}^{1/2}(\varphi, \vartheta, -\varphi) \end{pmatrix} \\ \chi(p, s) &= \gamma_5 u(p, s) \\ \chi(p, s) &= -\bar{u}(p, s) \gamma_5 \end{aligned}$$

b) $\hat{s}(k, \lambda)$ und $\hat{s}^*(k, \lambda)$

$$\hat{s}(k, \lambda) = \hat{s}_{\text{in}}(k, \lambda) e^{-i k \lambda} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{s}_{\text{in}}(\omega) e^{-i \omega \lambda} \otimes \left(\delta_{\omega=k} + \delta_{\omega=k+2\pi} \right) \otimes \begin{pmatrix} \hat{s}_{\text{in}}^{\text{re}}(\omega) & -i \hat{s}_{\text{in}}^{\text{im}}(\omega) \\ i \hat{s}_{\text{in}}^{\text{im}}(\omega) & \hat{s}_{\text{in}}^{\text{re}}(\omega) \end{pmatrix}$$

$$\hat{s}^*(k, \lambda) = \hat{s}_{\text{in}}^*(k, \lambda) e^{i k \lambda} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{s}_{\text{in}}^*(\omega) e^{i \omega \lambda} \otimes \left(\delta_{\omega=k} + \delta_{\omega=k-2\pi} \right) \otimes \begin{pmatrix} \hat{s}_{\text{in}}^{\text{re}}(\omega) & i \hat{s}_{\text{in}}^{\text{im}}(\omega) \\ -i \hat{s}_{\text{in}}^{\text{im}}(\omega) & \hat{s}_{\text{in}}^{\text{re}}(\omega) \end{pmatrix}$$

3. Produkte von $u(p, s)$, $\bar{u}(p, s)$, $s(p, \lambda)$, $s^*(p, \lambda)$ mit γ^μ und p^μ

Durch die in Abschn. 5.2. angegebenen Methoden lassen sich beliebige Matrixelemente mit den folgenden Vereinbarungen auf Produkte der nachstehenden Ausdrücke reduzieren:

$$\hat{u}_i = \hat{u} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad i=1,2,3$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_4 &= \hat{u} \hat{u}_5 \\ \hat{u}_5 &= \hat{u} \hat{u}_6 \\ \hat{u}_6 &= m_5^2 \\ \hat{u}_7 &= \begin{cases} \text{sgn}(p_{\text{tot}}), & \text{falls } m_5 \neq 0 \\ 0, & \text{falls } m_5 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\bar{u}(p_2, s_2) u(p_1, s_1) = \left[\sqrt{(p_{20} + m_2)(p_{10} + m_1)} - 4s_1 s_2 \epsilon_1 \epsilon_2 \sqrt{(p_{20} - m_2)(p_{10} - m_1)} \right] \cdot \sum_{m=\pm 1/2} \mathcal{D}_{m, -\eta_2 s_2}^{1/2*}(\varphi_2, \vartheta_2, -\varphi_2) \mathcal{D}_{m, -\eta_1 s_1}^{1/2}(\varphi_1, \vartheta_1, -\varphi_1)$$

$$\bar{u}(p_2, s_2) \gamma_5 u(p_1, s_1) = \left[2s_1 \epsilon_1 \sqrt{(p_{20} + m_2)(p_{10} - m_1)} - 2s_2 \epsilon_2 \sqrt{(p_{20} - m_2)(p_{10} + m_1)} \right] \cdot \sum_{m=\pm 1/2} \mathcal{D}_{m, -\eta_2 s_2}^{1/2*}(\varphi_2, \vartheta_2, -\varphi_2) \mathcal{D}_{m, -\eta_1 s_1}^{1/2}(\varphi_1, \vartheta_1, -\varphi_1)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_2, s_2) \mathcal{E}(p_3, s_3) u(p_1, s_1) &= \delta_{0s_3} \frac{p_3}{m_3} \left[\sqrt{(p_{20} + m_2)(p_{10} + m_1)} + 4s_1 s_2 \epsilon_1 \epsilon_2 \sqrt{(p_{20} - m_2)(p_{10} - m_1)} \right] \cdot \\ &\quad \sum_{m=\pm 1/2} \mathcal{D}_{m, -\eta_2 s_2}^{1/2*}(\varphi_2, \vartheta_2, -\varphi_2) \mathcal{D}_{m, -\eta_1 s_1}^{1/2}(\varphi_1, \vartheta_1, -\varphi_1) \\ &\quad - (\delta_{0s_3} \frac{p_{30}}{m_3} + \delta_{11s_3}) \left[2s_1 \epsilon_1 \sqrt{(p_{20} + m_2)(p_{10} - m_1)} + 2s_2 \epsilon_2 \sqrt{(p_{20} - m_2)(p_{10} + m_1)} \right] \cdot \\ &\quad \sum_{m=\pm 1/2} (-1)^{1/2-m} \mathcal{D}_{m, -\eta_2 s_2}^{1/2*}(\varphi_2, \vartheta_2, -\varphi_2) \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ \sqrt{2} \mathcal{D}_{2m, \eta_3 s_3}^{1/2*}(\varphi_3, \vartheta_3, -\varphi_3) \mathcal{D}_{m, -\eta_1 s_1}^{1/2}(\varphi_1, \vartheta_1, -\varphi_1) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{D}_{0, -\eta_3 s_3}^1(\varphi_3, \vartheta_3, -\varphi_3) \mathcal{D}_{m, -\eta_1 s_1}^{1/2}(\varphi_1, \vartheta_1, -\varphi_1) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_2, s_2) \mathcal{E}^*(p_3, s_3) u(p_1, s_1) &= \delta_{0s_3} \frac{p_3}{m_3} \left[\sqrt{(p_{20} + m_2)(p_{10} + m_1)} + 4s_1 s_2 \epsilon_1 \epsilon_2 \sqrt{(p_{20} - m_2)(p_{10} - m_1)} \right] \cdot \\ &\quad \sum_{m=\pm 1/2} \mathcal{D}_{m, -\eta_2 s_2}^{1/2*}(\varphi_2, \vartheta_2, -\varphi_2) \mathcal{D}_{m, -\eta_1 s_1}^{1/2}(\varphi_1, \vartheta_1, -\varphi_1) \\ &\quad - (\delta_{0s_3} \frac{p_{30}}{m_3} + \delta_{11s_3}) \left[2s_1 \epsilon_1 \sqrt{(p_{20} + m_2)(p_{10} - m_1)} + 2s_2 \epsilon_2 \sqrt{(p_{20} - m_2)(p_{10} + m_1)} \right] \cdot \\ &\quad \sum_{m=\pm 1/2} (-1)^{1/2-m} \mathcal{D}_{m, -\eta_2 s_2}^{1/2*}(\varphi_2, \vartheta_2, -\varphi_2) \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ -\sqrt{2} \mathcal{D}_{-2m, \eta_3 s_3}^{1/2*}(\varphi_3, \vartheta_3, -\varphi_3) \mathcal{D}_{m, -\eta_1 s_1}^{1/2}(\varphi_1, \vartheta_1, -\varphi_1) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{D}_{0, -\eta_3 s_3}^1(\varphi_3, \vartheta_3, -\varphi_3) \mathcal{D}_{m, -\eta_1 s_1}^{1/2}(\varphi_1, \vartheta_1, -\varphi_1) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_2, s_2) \gamma_5 \mathcal{E}(p_3, s_3) u(p_1, s_1) &= -\delta_{0s_3} \frac{p_3}{m_3} \left[2s_1 \epsilon_1 \sqrt{(p_{20} + m_2)(p_{10} - m_1)} + 2s_2 \epsilon_2 \sqrt{(p_{20} - m_2)(p_{10} + m_1)} \right] \cdot \\ &\quad \sum_{m=\pm 1/2} \mathcal{D}_{m, -\eta_2 s_2}^{1/2*}(\varphi_2, \vartheta_2, -\varphi_2) \mathcal{D}_{m, -\eta_1 s_1}^{1/2}(\varphi_1, \vartheta_1, -\varphi_1) \\ &\quad + (\delta_{0s_3} \frac{p_{30}}{m_3} + \delta_{11s_3}) \left[\sqrt{(p_{20} + m_2)(p_{10} + m_1)} + 4s_1 s_2 \epsilon_1 \epsilon_2 \sqrt{(p_{20} - m_2)(p_{10} - m_1)} \right] \cdot \\ &\quad \sum_{m=\pm 1/2} (-1)^{1/2-m} \mathcal{D}_{m, -\eta_2 s_2}^{1/2*}(\varphi_2, \vartheta_2, -\varphi_2) \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ \sqrt{2} \mathcal{D}_{2m, \eta_3 s_3}^1(\varphi_3, \vartheta_3, -\varphi_3) \mathcal{D}_{m, -\eta_1 s_1}^{1/2}(\varphi_1, \vartheta_1, -\varphi_1) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{D}_{0, -\eta_3 s_3}^1(\varphi_3, \vartheta_3, -\varphi_3) \mathcal{D}_{m, -\eta_1 s_1}^{1/2}(\varphi_1, \vartheta_1, -\varphi_1) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_2, s_2) \gamma_5 \mathcal{E}^*(p_3, s_3) u(p_1, s_1) &= -\delta_{0s_3} \frac{p_3}{m_3} \left[2s_1 \epsilon_1 \sqrt{(p_{20} + m_2)(p_{10} - m_1)} + 2s_2 \epsilon_2 \sqrt{(p_{20} - m_2)(p_{10} + m_1)} \right] \cdot \\ &\quad \sum_{m=\pm 1/2} \mathcal{D}_{m, -\eta_2 s_2}^{1/2*}(\varphi_2, \vartheta_2, -\varphi_2) \mathcal{D}_{m, -\eta_1 s_1}^{1/2}(\varphi_1, \vartheta_1, -\varphi_1) \\ &\quad + (\delta_{0s_3} \frac{p_{30}}{m_3} + \delta_{11s_3}) \left[\sqrt{(p_{20} + m_2)(p_{10} + m_1)} + 4s_1 s_2 \epsilon_1 \epsilon_2 \sqrt{(p_{20} - m_2)(p_{10} - m_1)} \right] \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1,1/2} (-1)^{1/2-m} \mathcal{D}_{m-\eta_2 s_2}^{1/2*} (\ell_2, \ell_2, -\ell_2) \\ & \{-\sqrt{2} \mathcal{D}_{-2m-\eta_2 s_3}^{1*} (\ell_3, \ell_3, -\ell_3) \mathcal{D}_{m-\eta_2 s_4}^{1/2} (\ell_4, \ell_4, -\ell_4) \\ & - \mathcal{D}_{0, \eta_2 s_3}^{1*} (\ell_3, \ell_3, -\ell_3) \mathcal{D}_{m-\eta_2 s_4}^{1/2} (\ell_4, \ell_4, -\ell_4)\} \end{aligned}$$

$$\underline{L}_1 \quad \mathcal{E}(\rho_3, s_3) \cdot \rho_1 \cdot \frac{\rho_1}{m_3} \rho_{10} \delta_{0s_3} - \eta_1 \underline{P}_1 \left(\delta_{0s_3} \frac{\rho_{30}}{m_3} + \delta_{1|s_3|} \right) \sum_{m=1,1/2} \mathcal{D}_{m,0}^{1*} (\ell_1, \ell_1, -\ell_1) \mathcal{D}_{m, \eta_2 s_3}^1 (\ell_3, \ell_3, -\ell_3)$$

$$\begin{aligned} \underline{L}_2 \quad \mathcal{E}^*(\rho_3, s_3) \cdot \rho_1 &= [\mathcal{E}(\rho_3, s_3) \cdot \rho_1]^* \\ &= \frac{\rho_1}{m_3} \rho_{10} \delta_{0s_3} - \eta_1 \underline{P}_1 \left(\delta_{0s_3} \frac{\rho_{30}}{m_3} + \delta_{1|s_3|} \right) \sum_{m=1,1/2} \mathcal{D}_{m,0}^1 (\ell_1, \ell_1, -\ell_1) \mathcal{D}_{m, \eta_2 s_3}^{1*} (\ell_3, \ell_3, -\ell_3) \end{aligned}$$

$$\underline{f} \quad \rho_1 \cdot \rho_2 = \rho_{10} \rho_{20} - \eta_1 \eta_2 \underline{P}_1 \underline{P}_2 \sum_{m=1,1/2} \mathcal{D}_{m,0}^{1*} (\ell_1, \ell_1, -\ell_1) \mathcal{D}_{m,0}^1 (\ell_2, \ell_2, -\ell_2)$$

Anhang 4

Helizitätsamplituden und Partialwellenentwicklungs-
koeffizienten für das Born-Term-Modell (BTM) für
die Photo- und Elektroproduktion eines Pions

Die Pion-Photo- und Elektroproduktionsamplitude, ausgedrückt durch die
invarianten Amplituden von BALL [56] lautet: *)

$$F_i = -\Lambda_2^+ \bar{e} \phi^+ \Lambda_1 u(p_2, s_2) \gamma_5 \{ -k \gamma^\mu B_1 + (\rho_1^\mu + \rho_2^\mu) B_2 + 2 q^\mu B_3 + \gamma^\mu B_5 + \frac{1}{2} k [(\rho_1^\mu + \rho_2^\mu) B_6 + 2 q^\mu B_7] \} \cdot \epsilon_{\mu}(k, \lambda) u(p_4, s_4)$$

Für die Helizitätsamplitude in der geschlossenen Form, berechnet nach
dem in Abschn. 5.2. angegebenen Verfahren und den Beziehungen des An-
hangs 3, erhält man dann:

$$F_i = T_{fi}(s_2; s_4, \lambda) = -\Lambda_2^+ \bar{e} \phi^+ \Lambda_1 \{ \delta_{0\lambda} \frac{m}{k} \mathcal{D}_{s_1, s_2}^{1/2*}(\varphi, \varphi_i - \varphi) (2s_4 \phi_5 + 2s_2 \phi_6) - \delta_{1\lambda 1} \sqrt{2} [\delta_{2s_1 - 2, 0} (2s_4 \phi_1 + 2s_2 \phi_2) \mathcal{D}_{-s_1, s_2}^{1/2*}(\varphi, \varphi_i - \varphi) + (2s_4 \phi_3 + 2s_2 \phi_4) \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \mathcal{D}_{\lambda 0}^{1/2*}(\varphi, \varphi_i - \varphi) \mathcal{D}_{s_1, s_2}^{1/2*}(\varphi, \varphi_i - \varphi)] \}$$

Die in der Helizitätsamplitude auftretenden Größen ϕ_i , $i = 1, \dots, 6$ sind fol-
gendermaßen definiert: **)

$$\begin{aligned} V_1' &= \sqrt{(\rho_{10} + M_1)(\rho_{20} + M_2)} & F_1 &= B_1(\omega - M_1) + B_5' \\ V_2' &= \sqrt{(\rho_{10} - M_1)(\rho_{20} - M_2)} & F_2 &= -B_1(\omega + M_1) + B_5' \\ V_3' &= (\rho_{20} + M_2) N_2 & F_3 &= -(B_2 - 2B_3) + (\omega + M_1) \left(\frac{\rho_2}{2} - B_6 \right) \\ V_4' &= (\rho_{20} - M_2) N_1' & F_4 &= (B_2 - 2B_3) + (\omega - M_1) \left(\frac{\rho_2}{2} - B_6 \right) \\ V_5' &= k^2 \sqrt{(\rho_{20} + M_2)(\rho_{10} - M_1)} & F_5 &= (\rho_{10} + M_1) [B_4 k^2 + (\omega - M_1) B_5'] \\ V_6' &= \frac{1}{k^2} \sqrt{(\rho_{20} - M_2)(\rho_{10} + M_1)} & & - 2\omega k^2 [B_2 - (\omega + M_1) \frac{\rho_2}{2}] - [k^2 q_0 - k q k_0 \cos \vartheta] F_3 \\ & & F_6 &= (\rho_{10} - M_1) [B_4 k^2 + (\omega + M_1) B_5'] + 2\omega k^2 \cdot \\ & & & \cdot [B_2 + (\omega - M_1) \frac{\rho_2}{2}] - [k^2 q_0 - k q k_0 \cos \vartheta] F_4 \end{aligned}$$

$$\phi_i = N_i' F_i, \quad i = 1, \dots, 6$$

*) Es wurde zur weiteren Umformung die Beziehung $\epsilon(k, \lambda) \cdot k = 0$ benutzt.

**) $P_1^2 = M_1^2$, $P_2^2 = M_2^2$

Die Definitionen für die ϕ_i wurden zwar bereits von DEVENISH und LYTH [17] gegeben, doch sind in den dort angegebenen Definitionen Vorzeichen- und Indizierungsfehler enthalten, so daß der Vollständigkeit wegen die Definitionen hier noch einmal korrekt aufgeführt werden.

Für die Partialwellenentwicklungskoeffizienten erhält man mit dem oben beschriebenen Verfahren mit der folgenden Definition

$$T_{fi}(s_2, s_1, \lambda) = \sum_{j=1/2}^{\infty} (2j+1) a_j^{s_2, s_1, \lambda} D_{s_1, \lambda, s_2}^{j, \lambda} (T_i, T_i - T)$$

für die Entwicklungskoeffizienten $a_j^{s_2, s_1, \lambda}$ das Ergebnis:

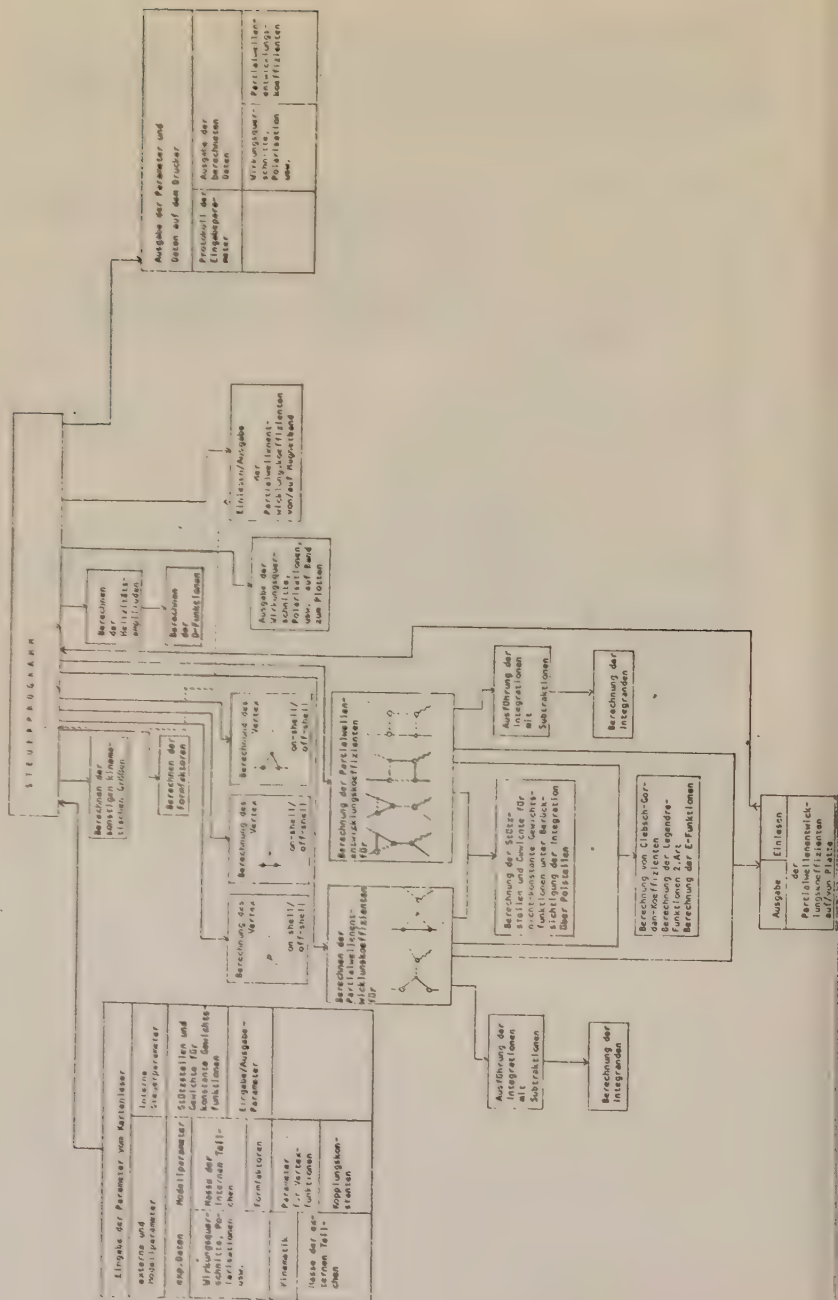
$$a_j^{s_2, s_1, \lambda} = \frac{\Lambda_2^+ \cdot \phi^* \Lambda_1}{(2j+1)} \left\{ \sum_{\ell=|j-1/2|}^{j+1/2} (2\ell+1) (1/2 s_1 - \ell) (1/2 j s_1 - \ell) (1/2 s_2 \ell) (1/2 j s_2) \right. \\ \left. \left[-\delta_{0\lambda} \frac{m}{R} (2s_1 N_5' [\delta_{0\ell} (f_1 - f_5 + f_2 - f_3) \right. \right. \right. \\ \left. \left. + Q_\ell(Z_2) (f_3 + f_{14}) + (-1)^\ell Q_\ell(Z_1) f_{13}] \right. \right. \\ \left. \left. + 2s_2 N_6' [\delta_{0\ell} (-f_2 - f_6 + f_8 + f_{10}) - Q_\ell(Z_2) (f_4 + f_{12}) \right. \right. \\ \left. \left. - (-1)^\ell Q_\ell(Z_1) f_{14}] \right] \right. \\ \left. + \delta_{11\lambda} \sqrt{2} \delta_{2s_1, \lambda} \left(2s_1 N_1' [\delta_{0\ell} f_{15} + Q_\ell(Z_2) f_{17}] \right. \right. \\ \left. \left. + 2s_2 N_2' [\delta_{0\ell} f_{16} - Q_\ell(Z_2) f_{18}] \right) \right\} \\ + \delta_{112\lambda} \sum_{j=1/2}^{3/2} (1 - \ell) (1/2 s_1 - \ell) (1/2 j s_1 - \ell) (1/2 s_2 \ell) (1/2 j s_2) \cdot \\ \cdot \sum_{\ell=|j-1/2|}^{j+1/2} (2\ell+1) (j s_1 - \ell) (j s_1 - \ell) (j s_2 \ell) (j s_2) \cdot \\ \cdot \left\{ 2s_1 N_3' [Q_\ell(Z_2) f_{19} - (-1)^\ell Q_\ell(Z_1) f_{21}] \right. \\ \left. + 2s_2 N_4' [Q_\ell(Z_2) f_{20} + (-1)^\ell Q_\ell(Z_1) f_{22}] \right\}$$

Die Größen f_i , $i = 1, \dots, 22$ sind hierbei folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= g_e \{ k^2 (p_{10} + M) (F_1' + 2MF_2') + 2\omega k^2 [F_1' + (\omega + M) F_2'] \} / (s - M^2) \\
 f_2 &= g_e \{ k^2 (p_{10} - M) (F_1' + 2MF_2') + 2\omega k^2 [F_1' - (\omega - M) F_2'] \} / (s - M^2) \\
 f_3 &= g_e \{ k^2 (p_{10} + M) (F_1'' + 2MF_2'') + 2\omega k^2 [F_1'' + (\omega + M) F_2''] \} / 2kq \\
 f_4 &= g_e \{ k^2 (p_{10} - M) (F_1'' + 2MF_2'') + 2\omega k^2 [F_1'' - (\omega - M) F_2''] \} / 2kq \\
 f_5 &= g_e (\omega - M) (p_{10} + M) F_2' \\
 f_6 &= g_e (\omega + M) (p_{10} - M) F_2' \\
 f_7 &= g_e (\omega - M) (p_{10} + M) F_2'' \\
 f_8 &= g_e (\omega + M) (p_{10} - M) F_2'' \\
 f_9 &= g_e k_0 [F_1'' + (\omega + M) F_2'' + \xi F_\pi^V] \\
 f_{10} &= g_e k_0 [F_1'' - (\omega - M) F_2'' + \xi F_\pi^V] \\
 f_{11} &= g_e [F_1'' + (\omega + M) F_2''] [-k^2 (k_0 - 2q_0) + 2k_0 (Z_1 + Z_2) kq] / 2kq \\
 f_{12} &= g_e [F_1'' - (\omega - M) F_2''] [-k^2 (k_0 - 2q_0) + 2k_0 (Z_1 + Z_2) kq] / 2kq \\
 f_{13} &= g_e k^2 (k_0 - 2q_0) \xi F_\pi^V / 2kq \\
 f_{14} &= f_{13} \\
 f_{15} &= g_e [(F_1' + 2MF_2') / (\omega + M) - F_2' + F_2''] \\
 f_{16} &= g_e [-(F_1' + 2MF_2') / (\omega - M) - F_2' + F_2''] \\
 f_{17} &= g_e (F_1'' + 2MF_2'') (\omega - M) / 2kq \\
 f_{18} &= g_e (F_1'' + 2MF_2'') (\omega + M) / 2kq \\
 f_{19} &= 2g_e [F_1'' + (\omega + M) F_2''] / 2kq \\
 f_{20} &= 2g_e [F_1'' - (\omega - M) F_2''] / 2kq \\
 f_{21} &= 2g_e \xi F_\pi^V / 2kq \\
 f_{22} &= f_{21}
 \end{aligned}$$

Arihant's

Vereinfachtes Fluiddiagramm des FORTRAN-Programms

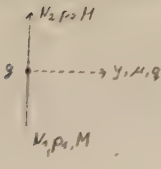


Anhang 6

Matrizelemente für die verschiedenen Meson-Nukleon-Vertizes

6.1.1. Meson-Nukleon-Punkt-Vertex

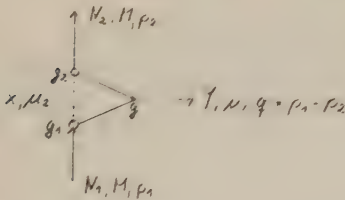
Das Matrizelement T_{fi} für den Punktvertex lautet:



$$T_{fi} = -g \Lambda_2^* T \Lambda_1 \bar{u}(p_2, s_2) T' u(p_1, s_1)$$

$$T' = \begin{cases} \gamma^5 & \text{for } \pi, \eta, \eta' \\ 1 & \text{for } \sigma \end{cases}$$

6.1.2. Dreiecksdiagramm für den Meson-Nukleon-Vertex mit einem inneren Meson



Ist X ein Spin 0-Teilchen, so erhält man für das Matrizelement:

$$T_{fi} = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4x \int d^4y \int d^4z \Lambda_2^* T \Lambda_1 \bar{u}(p_2, s_2) T' u(p_1, s_1) \cdot \bar{u}(p_2, s_2) T' (-K_2 + m_3 \gamma^5) (K_2 + m_4 \gamma^5) u(p_1, s_1)$$

$$= g_1 g_2 g \Lambda_2^* T \Lambda_1 \bar{u}(p_2, s_2) T' u(p_1, s_1) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2kq} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left\{ P_2(\cos \vartheta) \left[\tilde{B}_1^{(l)} + \frac{2M}{f} (p_{10})_y P_{20} \tilde{B}_{32}^{(l)} + (k_2 - 1) \frac{q}{f} \cos \vartheta \tilde{B}_{22}^{(l)} \right. \right.$$

$$\left. + \lambda_3 \sqrt{\frac{2f}{k_2}} \frac{q}{f} \cos \vartheta \tilde{B}_{42}^{(l)} \right\} \cdot$$

$$- \lambda_3 P_{2-2}(\cos \vartheta) \frac{2M}{f} \sqrt{\frac{2f}{k_2}} \frac{q}{f} \tilde{B}_{42}^{(l)}$$

Für diesen Fall wurden Rechnungen sowohl für den Ansatz (2.11a) ($n_2 = 1$) als auch für den Ansatz (2.11b) ($n_2 = 0$) durchgeführt. Die im Matrixelement auftretenden Größen sind wie folgt definiert:

$$n_1 = 1; n_2 = 0,1; n_3 = 0$$

$$M^{(1)} = \mu_2; M^{(2)} = \mu_2^{(2)}; M^{(3)} = \mu_2^{(2)}$$

$$\bar{H}_1^{(i)} = H_1^{(i)}; i = 1, 2$$

$$\bar{H}_3^{(j)} = H_3^{(j)}; j = 1, 2$$

$$\lambda_x = \begin{Bmatrix} 1 & x & PS \\ -1 & x & S \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_y = \begin{Bmatrix} 1 & y & PS \\ -1 & y & S \end{Bmatrix}$$

$$f = \begin{Bmatrix} t & y & PS \\ 4M^2 t & y & S \end{Bmatrix}$$

$$K = \begin{Bmatrix} 1 & X JV \text{ und } PS \text{ oder } JS \text{ und } S \\ -1 & X JS \text{ und } PS \text{ oder } JV \text{ und } S \end{Bmatrix}$$

$$B_{1e}^{(i)} = (-b_2^2 + m_1^{(i)} m_3^{(j)}) Q_e(Z_1) Q_e(Z_2)$$

$$B_{3e}^{(i)} = (m_1^{(i)} - m_3^{(j)}) b_{20} Q_e(Z_1) Q_e(Z_2)$$

$$B_{2e}^{(i)} = (m_1^{(i)} - m_3^{(j)}) b_{2e} (Z_1 Q_e(Z_1) - \delta_{0e}) Q_e(Z_2)$$

$$B_{4e}^{(i)} = (m_1^{(i)} - m_3^{(j)}) b_{2e} DE_e^{(10)}(Z_1) Q_e(Z_2)$$

Ist X ein Spin 1-Teilchen, lautet der Ausdruck für T_{fi} :

$$-i T_{fi} = \frac{i}{(2\pi)^4} K g_1 g_2 g \Lambda_2^+ T \Lambda_1 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} \int d_4 b_2 \frac{1}{b_2^2 - M_1^{(i)2} + \epsilon} \frac{-g^{\mu\nu} + \frac{b_2^\mu b_2^\nu}{\mu_2^2}}{b_2^2 - \mu_2^{(2)2} + \epsilon} \frac{1}{b_3^2 - M_3^{(j)2} + \epsilon} \cdot \bar{u}(p_2, s_2) T_\mu (b_3 + M_3^{(j)}) T^\dagger (b_3 + M_1^{(i)}) T_\nu u(p_1, s_1)$$

$$T_\mu = \begin{Bmatrix} \gamma_\mu & X V \\ \gamma_5 \gamma_\mu & X PV \end{Bmatrix}$$

$$K = \begin{Bmatrix} 1 & X = S \\ -1 & X = \omega_i \phi_i A_i B_i \end{Bmatrix}$$

$$T^\dagger = \begin{Bmatrix} \gamma_5 & X PS \\ 1 & X S \end{Bmatrix}$$

Für Vektorteilchen gilt für den magnetischen Vertexanteil:

$$\Gamma_{\mu} = \mu_N \frac{1}{M_1(i) + M} i \sigma_{\mu\kappa} b_2^{\kappa} \text{ bzw. } \Gamma_{\nu} = \mu_N \frac{1}{M_3(j) + M} i \sigma_{\nu\kappa} b_2^{\kappa}$$

Als Beispiel werden für Vektorteilchen die Ausdrücke für die elektrische Kopplung an das Nukleon angegeben. Für die Vektor- und Pseudovektormesonen erhält man dann die folgende Beziehung für das Matrixelement T_{fi} :

$$\begin{aligned} T_{fi} = & -g_1 g_2 g \Lambda_2^+ T \Lambda_1 \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \bar{u}(p_2, s_2) T' u(p_1, s_1) \cdot \\ & \cdot \sum_{e=0}^{\infty} (2L+1) \left\{ P_e(\cos \vartheta) \left(4(k_0 \cos \vartheta - p_{10} p_{20}) \tilde{B}_{5e}^{(2)} - 2M \tilde{B}_{6e}^{(2)} - 2\tilde{B}_{3e}^{(2)} + 4\tilde{B}_{4e}^{(2)} + \frac{1}{\mu_2^2} (\tilde{B}_{3e}^{(2)} + 2M \tilde{B}_{10e}^{(2)} + 4M \tilde{B}_{8e}^{(2)}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2M}{f} [(p_{10} - \lambda_y p_{20}) (2\tilde{B}_{3e}^{(2)} + \frac{1}{\mu_2^2} \tilde{B}_{11e}^{(2)}) \right. \right. \\ & \left. \left. + (k_0 - \lambda_y q \cos \vartheta) (2\tilde{B}_{2e}^{(2)} + \frac{1}{\mu_2^2} \tilde{B}_{12e}^{(2)}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \lambda_y q \cos \vartheta \sqrt{\frac{2L}{L+1}} (2\tilde{B}_{4e}^{(2)} + \frac{1}{\mu_2^2} \tilde{B}_{13e}^{(2)}) \right] \right\} \\ & - \lambda_y P_{e-1}(\cos \vartheta) \frac{2M}{f} q \sqrt{\frac{2L}{L+1}} (2\tilde{B}_{4e}^{(2)} + \frac{1}{\mu_2^2} \tilde{B}_{13e}^{(2)}) \} \end{aligned}$$

In diesem Fall wurden nur Rechnungen mit dem Ansatz (2.11b) ($n_2 = 0$) durchgeführt. Es gelten die folgenden Definitionen:

$$n_1 = 1; n_2 = 0; n_3 = 0$$

$$\mu_1 = \mu_2$$

$$H_i^{(2)}, i = 1, 2$$

$$H_j^{(2)}, j = 1, 2$$

$$x = \begin{Bmatrix} 1 & x & V \\ -1 & x & PV \end{Bmatrix} = \begin{cases} \text{Vektor-Teilchen} \\ \text{Pseudovektor-Teilchen} \end{cases}$$

$$y = \begin{Bmatrix} 1 & y & PS \\ -1 & y & S \end{Bmatrix}$$

$$f = \begin{cases} z & y & PS \\ 4M^2 + y & S \end{cases}$$

$$B_{1e}^{(2)} = (-b_2^2 + m_1^{(i)} m_3^{(j)}) Q_e(Z_1) Q_e(Z_2)$$

$$B_{e1}^{(2)} = m_1^{(i)} m_3^{(j)} Q_e(Z_1) Q_e(Z_2)$$

$$B_{2e}^{(2)} = (m_3^{(j)} - m_1^{(i)}) \underline{b}_2 [Z_1 Q_e(Z_1) - \delta_{0e}] Q_e(Z_2)$$

$$B_{e2}^{(2)} = (-m_1^{(i)} m_3^{(j)} b_2^2 + m_1^{(i)2} m_3^{(j)2}) Q_e(Z_1) Q_e(Z_2)$$

$$B_{3e}^{(2)} = (m_3^{(j)} - m_1^{(i)}) \underline{b}_{2e} Q_e(Z_1) Q_e(Z_2)$$

$$B_{e3}^{(2)} = (m_1^{(i)} m_3^{(j)2} + m_1^{(i)2} m_3^{(j)}) Q_e(Z_1) Q_e(Z_2)$$

$$B_{4e}^{(2)} = (m_3^{(j)} - m_1^{(i)}) \underline{b}_2 \text{DE}_e^{(2)}(Z_1) Q_e(Z_2)$$

$$B_{e4}^{(2)} = (m_3^{(j)} m_1^{(i)2} - m_1^{(i)} m_3^{(j)2}) b_{20} Q_e(Z_1) Q_e(Z_2)$$

$$B_{5e}^{(2)} = Q_e(Z_1) Q_e(Z_2)$$

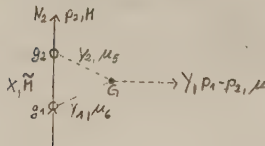
$$B_{e5}^{(2)} = (m_3^{(j)} m_1^{(i)2} - m_1^{(i)} m_3^{(j)2}) \underline{b}_2 [Z_1 Q_e(Z_1) - \delta_{0e}]$$

$$B_{6e}^{(2)} = (m_1^{(i)} + m_3^{(j)}) Q_e(Z_1) Q_e(Z_2)$$

$$B_{e6}^{(2)} = (m_3^{(j)} m_1^{(i)2} - m_1^{(i)} m_3^{(j)2}) \underline{b}_2 \text{DE}_e^{(2)}(Z_1) Q_e(Z_2)$$

$$B_{7e}^{(2)} = (m_1^{(i)2} + m_3^{(j)2}) Q_e(Z_1) Q_e(Z_2)$$

6.1.3. Dreiecksdiagramm für den Meson-Nukleon-Vertex mit zwei inneren Mesonen



$$X = p, n$$

$$Y, Y_1, Y_2 = \pi, \eta, \eta'; \sigma, \epsilon, \delta;$$

Für T_{fi} erhält man:

$$\begin{aligned}
 -i T_{fi} &= \frac{-i}{(2\pi)^4} g_1 g_2 G F \Lambda_2^* T \Lambda_1 \sum_{i=1}^{n_1+1} \sum_{j=1}^{n_2+1} (-1)^{i+j} \int d^4 b_2 \bar{u}(p_2, s_2) (a + b b_2) u(p_1, s_1) \frac{1}{b_2^2 - \mu_6^{(i)2} + i\epsilon} \frac{1}{b_3^2 - \mu_6^{(j)2} + i\epsilon} \\
 &= g_1 g_2 G F \Lambda_2^* T \Lambda_1 \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_9} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left\{ P_\ell(\cos \vartheta) \left[\tilde{B}_{1e}^{(2)} + \frac{2H}{f} (p_{10} + \lambda p_{20}) \tilde{B}_{3e}^{(2)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (b + \lambda q) \cos \vartheta \tilde{B}_{2e}^{(2)} - \lambda q \sqrt{\frac{2\ell}{\ell+1}} \cos \vartheta \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + P_{\ell-1}(\cos \vartheta) \lambda \sqrt{\frac{2\ell}{\ell+1}} \frac{q}{f} \tilde{B}_{4e}^{(2)} \right\}
 \end{aligned}$$

Es wurden Rechnungen mit Spin 0-Mesonen im Dreiecksdiagramm mit den Ansätzen (2.11a) ($n_2 = 1$) und (2.11b) ($n_2 = 0$) durchgeführt. Die oben verwendeten Größen sind folgendermaßen definiert:

$$n_1 = 0, 1; \quad n_2 = 0, 1; \quad n_3 = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{Fall 1} \\ \text{Fall 2} \\ \text{Fall 3} \\ \text{Fall 4} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} Y_1 \text{ und } Y_2 \quad PS, YS \\ Y_2 \text{ und } Y \quad PS, Y_1 S \\ Y_1 \text{ und } Y \quad PS, Y_2 S \\ Y_1 \text{ und } Y_2 \text{ und } Y S \end{array} \right.$$

$$F = \begin{cases} \mu & \text{Fall 1} \\ \mu_6 & \text{Fall 2} \\ \mu_5 & \text{Fall 3} \\ 1 & \text{Fall 4} \end{cases}$$

$$\lambda = \begin{cases} -1 & \text{Fall 2 oder Fall 3} \\ 1 & \text{Fall 1 oder Fall 4} \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} t & \text{Fall 2 oder Fall 3} \\ -(4M^2 - t) & \text{Fall 1 oder Fall 4} \end{cases}$$

Für die Massen gilt:

$$M_i^{(1)} = \tilde{M} \quad ; \quad M^{(2)} = M_5 \quad ; \quad M_3^{(2)} = M_6$$

$$\overline{M}_1^{(i)} = \mu_6^{(i)} \quad i = 1, 2$$

$$\overline{M}_3^{(j)} = \mu_5^{(j)} \quad j = 1, 2$$

$$\Lambda_5^2 = M_5^2 - \tilde{M}^2$$

$$\Lambda_6^2 = M_6^2 - \tilde{M}^2$$

M_5 = Masse des Spin 1/2-Zwischenteilchens am Vertex XN_2Y_2

M_6 = Masse des Spin 1/2-Zwischenteilchens am Vertex XN_1Y_1

Die Integranden sind definiert als

$$\mathcal{B}_1^{(2)} = a Q_e(Z_1) Q_e(Z_2)$$

$$\mathcal{B}_2^{(2)} = b \underline{b}_2 [Z_1 Q_e(Z_1) - \delta_{0e}] Q_e(Z_2)$$

$$\mathcal{B}_3^{(2)} = b \underline{b}_{20} Q_e(Z_1) Q_e(Z_2)$$

$$\mathcal{B}_4^{(2)} = b \underline{b}_2 DE_e^{MO}(Z_1) Q_e(Z_2)$$

wobei

$$b = \begin{cases} \mathcal{B} & \text{Fall 1} \\ \mathcal{B} & \text{Fall 2} \\ -\mathcal{B} & \text{Fall 3} \\ \mathcal{B} & \text{Fall 4} \end{cases}$$

$$a = \begin{cases} -A & \text{Fall 1} \\ A & \text{Fall 2} \\ A & \text{Fall 3} \\ A & \text{Fall 4} \end{cases}$$

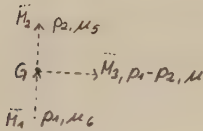
$$A = \frac{1}{b_2^2 - M_5^2 + i\epsilon} \frac{1}{b_2^2 - M_6^2 + i\epsilon} \left\{ \frac{\tilde{H} \Lambda_5^2 \Lambda_6^2}{b_2^2 - \tilde{H}^2 + i\epsilon} - [\tilde{M} (M_5 - \tilde{H})(M_6 - \tilde{H}) + \Lambda_6^2 (M_5 - \tilde{H}) + \Lambda_5^2 (M_6 - \tilde{H})] \right\}$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{b_2^2 - M_5^2 + i\epsilon} \frac{1}{b_2^2 - M_6^2 + i\epsilon} \left\{ \frac{\Lambda_5^2 \Lambda_6^2}{b_2^2 - \tilde{H}^2 + i\epsilon} + (M_5 - \tilde{H})(M_6 - \tilde{H}) \right\}$$

ist.

6.2. 3-Mesonen-Vertex

6.2.1. 3-Mesonen-Punkt-Vertex



Das Matricelement ist in diesem Fall relativ einfach, da alle äußeren Mesonen den Spin 0 haben:

$$T_{fi} = - F G$$

F ist wie folgt definiert:

$$F = \begin{cases} \mu & \text{Fall 1} \\ \mu_6 & \text{Fall 2} \\ \mu_5 & \text{Fall 3} \\ 1 & \text{Fall 4} \end{cases}$$

Die einzelnen Fälle werden bezeichnet als:

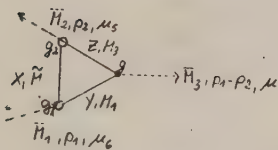
Fall 1 = $\bar{M}_1$ und $\bar{M}_2$ PS, $\bar{M}_3$ S

Fall 2 = $\bar{M}_2$ und $\bar{M}$ PS, $\bar{M}_1$ S

Fall 3 = $\bar{M}_1$ und $\bar{M}$ PS, $\bar{M}_2$ S

Fall 4 = $\bar{M}_1$ und $\bar{M}_2$ und $\bar{M}_3$ S.

6.2.2. Dreiecksdiagramm für den 3-Mesonen-Vertex



$$X, Y, Z = p, h$$

$$\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3 = \pi, \eta, \eta'; \phi, \delta, \epsilon;$$

Für das Matrixelement dieses Vertex' erhält man:

$$\begin{aligned}
 -\lambda' \bar{T}_{fi} &= \frac{-g_1}{(2\pi)^4} g_1 g_2 g \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} \\
 &\int d^4 b_2 \frac{A(\rho_1 \cdot \rho_2 + M_1^{(1)} M_3^{(1)}) + (-A + M_3^{(1)} B) \rho_1 \cdot b_2 + (-A + M_1^{(1)} B) \rho_2 \cdot b_2 + [A - B (M_1^{(1)} + M_3^{(1)})]}{(b_1^2 - M_1^{(1)2} + \epsilon^2 E)(b_3^2 - M_3^{(1)2} + \epsilon^2 E)} \\
 &= -g_1 g_2 g \frac{g}{(2\pi)^3 2kq} \lambda \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left\{ P_{\ell}(\cos \vartheta) \left[-(\rho_{10} \rho_{20} - kq \cos \vartheta) \tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\rho_{10} + \rho_{20}) \tilde{\Phi}_3 + (k + q \cos \vartheta) \tilde{\Phi}_4 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \sqrt{\frac{2\ell}{\ell+1}} q \cos \vartheta (\tilde{\Phi}_5 - \tilde{\Phi}_{11}) - \tilde{\Phi}_6 - \rho_{10} \tilde{\Phi}_7 - \rho_{20} \tilde{\Phi}_8 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - k \tilde{\Phi}_9 - q \cos \vartheta \tilde{\Phi}_{10} \right] \right. \\
 &\quad \left. + P_{\ell-1}(\cos \vartheta) - \sqrt{\frac{2\ell}{\ell+1}} q (\tilde{\Phi}_5 - \tilde{\Phi}_{11}) \right\}
 \end{aligned}$$

Die Rechnungen wurden sowohl mit dem Ansatz (2.11a) ($n_2 = 1$) als auch mit dem Ansatz (2.11b) ($n_2 = 0$) ausgeführt. Es gilt die folgende Bezeichnungsweise (λ und die Fallunterscheidungen wurden bereits in Abschn. 6.1.3.) definiert:

Für n_1, n_2, n_3 gilt:

$$n_1 = 1; \quad n_2 = 0, 1; \quad n_3 = 0$$

Die Phasenfaktoren λ_B, λ_1 und λ_3 lauten:

$$\begin{aligned}
 \lambda_B &= \begin{cases} 1 & \text{Fall 1} \\ -1 & \text{Fall 2} \\ -1 & \text{Fall 3} \\ -1 & \text{Fall 4} \end{cases} & \lambda_3 &= \begin{cases} 1 & \text{Fall 1} \\ -1 & \text{Fall 2} \\ 1 & \text{Fall 3} \\ 1 & \text{Fall 4} \end{cases} \\
 \lambda_1 &= \begin{cases} 1 & \text{Fall 1} \\ 1 & \text{Fall 2} \\ -1 & \text{Fall 3} \\ 1 & \text{Fall 4} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Weitere zur Berechnung des Matrixelementes notwendige Ausdrücke sind:

$$\bar{M}_1^{(i)} = M_1^{(i)} \quad i = 1, 2$$

$$\bar{M}_3^{(j)} = M_3^{(j)} \quad j = 1, 2$$

$$M_1' = \lambda_1 \bar{M}_1$$

$$M_3' = \lambda_3 \bar{M}_3$$

$$M^{(1)} = \tilde{M} ; M^{(2)} = M_5 ; M^{(3)} = M_6 ;$$

$$D_1 = \tilde{M} \Lambda_5^2 \Lambda_6^2$$

$$D_2 = -(M_5 - \tilde{M})(M_6 - \tilde{M}) [3\tilde{M} + M_5 + M_6]$$

$$D_3 = \Lambda_5^2 \Lambda_6^2$$

$$D_4 = (M_5 - \tilde{M})(M_6 - \tilde{M})$$

$$D_1' = D_1$$

$$D_2' = D_2$$

$$D_3' = \lambda_3 D_3$$

$$D_4' = \lambda_3 D_4$$

$$\Lambda_5^2 = M_5^2 - \tilde{M}^2$$

$$\Lambda_6^2 = M_6^2 - \tilde{M}^2$$

$$A = \frac{1}{b_2^2 - M_5^2 + i\epsilon} \frac{1}{b_2^2 - M_6^2 + i\epsilon} \left(\frac{D_1}{b_2^2 - \tilde{M}^2 + i\epsilon} + D_2 \right)$$

$$B = \frac{1}{b_2^2 - M_5^2 + i\epsilon} \frac{1}{b_2^2 - M_6^2 + i\epsilon} \left(\frac{D_2}{b_2^2 - \tilde{M}^2 + i\epsilon} + D_4 \right)$$

$$B_{1e}^{(0)} = \frac{Q_e(z_1) Q_e(z_2)}{(b_2^2 - \tilde{M}^2 + i\epsilon) (b_2^2 - M_5^2 + i\epsilon) (b_2^2 - M_6^2 + i\epsilon)}$$

$$B_{2e}^{(0)} = b_2 \frac{(z_1 Q_e(z_1) - \delta_{0e}) Q_e(z_2)}{(b_2^2 - \tilde{M}^2 + i\epsilon) (b_2^2 - M_5^2 + i\epsilon) (b_2^2 - M_6^2 + i\epsilon)}$$

$$B_{3e}^{(0)} = b_{20} B_1$$

$$B_{4e}^{(0)} = b_2^2 B_1$$

$$B_{5e}^{(0)} = b_2 \frac{\mathcal{D}E_{110}(z_1) Q_e(z_2)}{(b_2^2 - \tilde{M}^2 + i\epsilon) (b_2^2 - M_5^2 + i\epsilon) (b_2^2 - M_6^2 + i\epsilon)}$$

$$\tilde{B}_{i\ell}^{(n)} = (b_2^2 - \tilde{H}^2) \tilde{B}_{i\ell-5\ell}^{(n)} \quad , \quad i = 6, \dots, 10$$

$$\tilde{\Phi}_1 = \mathcal{D}_1' \tilde{B}_{1\ell}^{(n)} + \mathcal{D}_2' \tilde{B}_{6\ell}^{(n)}$$

$$\tilde{\Phi}_2 = M_1' M_3' (\mathcal{D}_1' \tilde{B}_{1\ell}^{(n)} + \mathcal{D}_2' \tilde{B}_{6\ell}^{(n)})$$

$$\tilde{\Phi}_3 = \mathcal{D}_1' \tilde{B}_{3\ell}^{(n)} + \mathcal{D}_2' \tilde{B}_{8\ell}^{(n)}$$

$$\tilde{\Phi}_4 = \mathcal{D}_1' \tilde{B}_{2\ell}^{(n)} + \mathcal{D}_2' \tilde{B}_{7\ell}^{(n)}$$

$$\tilde{\Phi}_5 = \mathcal{D}_1' \tilde{B}_{5\ell}^{(n)} + \mathcal{D}_2' \tilde{B}_{10\ell}^{(n)}$$

$$\tilde{\Phi}_6 = (\mathcal{D}_1' \tilde{B}_{4\ell}^{(n)} + \mathcal{D}_2' \tilde{B}_{9\ell}^{(n)}) - (M_1' + M_3') (\mathcal{D}_3' \tilde{B}_{4\ell}^{(n)} + \mathcal{D}_4' \tilde{B}_{9\ell}^{(n)})$$

$$\tilde{\Phi}_7 = M_3' (\mathcal{D}_3' \tilde{B}_{3\ell}^{(n)} + \mathcal{D}_4' \tilde{B}_{8\ell}^{(n)})$$

$$\tilde{\Phi}_8 = M_1' (\mathcal{D}_3' \tilde{B}_{3\ell}^{(n)} + \mathcal{D}_4' \tilde{B}_{8\ell}^{(n)})$$

$$\tilde{\Phi}_9 = M_3' (\mathcal{D}_3' \tilde{B}_{2\ell}^{(n)} + \mathcal{D}_4' \tilde{B}_{7\ell}^{(n)})$$

$$\tilde{\Phi}_{10} = M_1' (\mathcal{D}_3' \tilde{B}_{2\ell}^{(n)} + \mathcal{D}_4' \tilde{B}_{7\ell}^{(n)})$$

$$\tilde{\Phi}_{11} = M_1' (\mathcal{D}_3' \tilde{B}_{5\ell}^{(n)} + \mathcal{D}_4' \tilde{B}_{10\ell}^{(n)})$$

Anhang 7

Partialwellenentwicklungskoeffizienten für die Pion-Photo- und Elektroproduktion

Die Partialwellenentwicklungskoeffizienten a_J für die Photo- und Elektroproduktion sind definiert durch die Beziehung:

$$T_{fi}(s_2; s_1 \lambda) = \sum_{J=1/2}^{\infty} a_J D_{S_1-\lambda, S_2}^{J*}(\varphi, \vartheta, -\varphi)$$

Die einzelnen Graphen der Fig. 16 besitzen die in den nachstehenden Unterabschnitten angegebenen Partialwellenentwicklungskoeffizienten. Für die Vektormesonen werden als Beispiel - wie in Anhang 6 - nur die Entwicklungskoeffizienten für die elektrische Kopplung an das Nukleon angegeben.

7.1. Graphen vom Typ



Alle Amplituden für diesen Graphen-Typ lassen sich in die Form bringen:

$$-i T_{fi}^{(1)} = \text{const.} \frac{i}{(2\pi)^0} \frac{g_1 g_2 g_3}{\epsilon \cdot \mu^2} 2\epsilon(k, \lambda) \cdot q \int d^4b_2 \bar{u}(p_2, s_2) \gamma_\mu [\bar{a} + \bar{b} \gamma_5] u(p_1, s_1)$$

Hierbei ist "const." eine auch in den folgenden Abschnitten benutzte Konstante; ihre Definition ist:

$$\text{const.} = \begin{cases} iK g_1 g_2 g_3 \Lambda_2^+ T \Lambda_1 & \text{für Fig. 20a bzw. 21a mit } \left\{ \begin{array}{l} \pi, \sigma, \epsilon, \omega, \phi, A_1, B \\ \eta, \eta', \delta, \rho \end{array} \right. \\ -iK g_1 g_2 g_3 \Lambda_2^+ T \Lambda_1 & \\ g_1 g_2 e GF & \text{für Fig. 20b bzw. 21b.} \end{cases}$$

Die Partialwellenentwicklungskoeffizienten für diesen Graphen-Typ lauten:

$$a_j^{(n)} = \lambda \cdot \text{const} \cdot \frac{1}{2k} \frac{q}{q} \frac{2 \xi F_0}{t - \mu^2}.$$

$$\cdot \left\{ \sum_{j=1/2}^{3/2} \left[\frac{k}{m} q_0 \delta_{0,2} \delta_{j,1/2} - \frac{q}{2} \left(\delta_{0,2} \frac{k_2}{m} + \delta_{1,1} \right) \right] (1/2 s_1 1 - \lambda | 1/2 1 j s_1 - \lambda) (1/2 s_2 1 0 | 1/2 1 j s_2) \right\}.$$

$$\cdot \sum_{\ell=1}^{2\ell} (2\ell+1) (j s_1 - \lambda \ell 0 | j \ell j s_1 - \lambda) (j s_2 \ell 0 | j \ell j s_2).$$

$$\cdot \left[2s_1 N_3 \tilde{F}_{ne}^{(n)} + 2s_2 N_4 \tilde{F}_{2e}^{(n)} + \frac{4}{3} (2s_2 N_3 - 2s_1 N_4) \tilde{F}_{3e}^{(n)} + (2s_1 N_1 + 2s_2 N_2) \tilde{F}_{4e}^{(n)} \right]$$

$$+ \sqrt{2} \sum_{j=1/2}^{3/2} \left[\frac{k}{m} q_0 \delta_{0,2} \delta_{j,1/2} - \frac{q}{2} \left(\delta_{0,2} \frac{k_2}{m} + \delta_{1,1} \right) \right] (1/2 - s_1 1 - \lambda | 1/2 1 j - s_1 - \lambda) (1/2 s_2 1 0 | 1/2 1 j s_2)$$

$$\cdot \sum_{\ell=1}^{j+1} (2\ell+1) (j - s_1 - \lambda \ell 2 s_1 | j \ell j s_1 - \lambda) (j s_2 \ell 0 | j \ell j s_2).$$

$$\cdot [2s_1 N_1 + 2s_2 N_2] \tilde{F}_{5e}^{(n)}$$

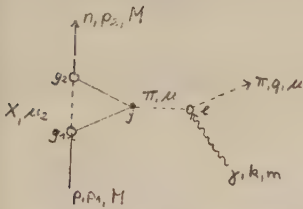
$$+ \frac{2}{3} \sum_{j=1/2}^{5/2} \left[\frac{k}{m} q_0 \delta_{0,2} \delta_{j,3/2} - \frac{q}{2} \left(\delta_{0,2} \frac{k_2}{m} + \delta_{1,1} \right) \right] (3/2 s_1 1 - \lambda | 1/2 1 j s_1 - \lambda) (3/2 s_2 1 0 | 1/2 1 j s_2)$$

$$\cdot \sum_{\ell=1}^{j+1} (2\ell+1) (j s_1 - \lambda \ell 0 | j \ell j s_1 - \lambda) (j s_2 \ell 0 | j \ell j s_2).$$

$$\cdot [2s_1 N_3 - 2s_2 N_4] \tilde{F}_{3e}^{(n)} \}$$

Die Definitionen für die verschiedenen Größen sind in den einzelnen Unterabschnitten angegeben.

7.1.1. Der Graph



Ist X ein Spin 0-Teilchen, so erhält man für T_{fi} :

$$\begin{aligned}
 -i T_{fi}^{(n)} &= \frac{i}{(2\pi)^4} K g_2 g_3 g_4 \Lambda_2^+ T \Lambda_1 \frac{\gamma F_{\pi}^V}{t - \mu^2} 2E(k, \lambda) \cdot q \cdot \\
 &\cdot \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} \int d^4 b_2 \frac{1}{b_1^2 - M_1^{(1)2} + i\epsilon} \frac{1}{b_2^2 - \mu_2^2 + i\epsilon} \frac{1}{[b_2^2 - \mu_2^{(2)2} + i\epsilon]^{n_2}} \frac{1}{b_3^2 - M_3^{(j)2} + i\epsilon} \\
 &\cdot \bar{u}(p_2, s_2) \Gamma(b_3 + M_3^{(j)}) \gamma_5 (b_1 + M_1^{(1)}) \Gamma u(p_1, s_1)
 \end{aligned}$$

wobei für Γ und κ die Abkürzungen

$$T = \begin{Bmatrix} \gamma_5 & \times & PS \\ 1 & \times & S \end{Bmatrix} \quad K = \begin{Bmatrix} 1 & \times = \pi, \phi e \\ -1 & \times = \eta, \eta' d \end{Bmatrix}$$

verwendet wurden.

Auch in diesem Fall wurden wieder Rechnungen mit den Ansätzen (2.11a) ($n_2 = 1$) und (2.11b) ($n_2 = 0$) durchgeführt.

Für die bei der Definition des Matrixelementes verwendeten anderen Größen gilt:

$$n_1 = 1; \quad n_2 = 0; \quad n_3 = 0$$

$$\lambda = -1$$

$$M^{(1)} = \mu_2; \quad M^{(2)} = \mu_2^{(2)}; \quad M^{(3)} = M^{(2)}$$

$$\tilde{\Lambda}_X = \begin{Bmatrix} 1 & \times & PS \\ -1 & \times & S \end{Bmatrix}$$

$$\bar{M}_1^{(i)} = M_1^{(i)} \quad i = 1, 2$$

$$\bar{M}_3^{(j)} = M_3^{(j)} \quad j = 1, 2$$

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} (b_2^2 + m_3^{(j)} m_4^{(i)}) \frac{1}{b_1^2 - H_1^{(i)2} + i\epsilon} \frac{1}{b_2^2 - \mu_2^2 + i\epsilon} \frac{1}{[b_2^2 - \mu_2^{(i)2} + i\epsilon]^{2n_2}} \frac{1}{b_2^2 - H_3^{(j)2} + i\epsilon}$$

$$\bar{b} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} (m_3^{(j)} - m_4^{(i)}) \frac{1}{b_1^2 - H_1^{(i)2} + i\epsilon} \frac{1}{b_2^2 - \mu_2^2 + i\epsilon} \frac{1}{[b_2^2 - \mu_2^{(i)2} + i\epsilon]^{2n_2}} \frac{1}{b_2^2 - H_3^{(j)2} + i\epsilon}$$

$$\tilde{F}_{1e}^{(i)} = \tilde{B}_{1e}^{(i)} - \tilde{B}_{3e}^{(i)} \quad \tilde{F}_{4e}^{(i)} = -\tilde{B}_{2e}^{(i)}$$

$$\tilde{F}_{2e}^{(i)} = -\tilde{B}_{1e}^{(i)} - \tilde{B}_{3e}^{(i)} \quad \tilde{F}_{5e}^{(i)} = \tilde{B}_{4e}^{(i)}$$

$$\tilde{F}_{3e}^{(i)} = 0$$

Die Größen $\tilde{B}_{il}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, wurden bereits in Abschnitt 6.1.2. definiert.

Ist X ein Spin 1-Teilchen, dann erhält man für T_{fi} :

$$T_{fi}^{(i)} = \left(\frac{1}{(2\pi)^4} \right) K' g_4 g_2 g e \Lambda_z^+ \left[\lambda_1 \frac{\xi F_V}{t - \mu^2} 2E(k, \lambda) \cdot q \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} d^4 b_2 \int \frac{1}{b_1^2 - H_1^{(i)2} + i\epsilon} \frac{g^{\mu\nu} b_2^\mu b_2^\nu}{b_2^2 - \mu_2^2 + i\epsilon} \frac{1}{b_1^2 - H_3^{(j)2} + i\epsilon} \right. \\ \left. \cdot \bar{u}(p_2, s_2) T_\mu(b_2 + H_3^{(j)}) \gamma_5 (b_1 + H_1^{(i)}) T_\nu(p_1, s_1) \right]$$

$$T_\mu = \begin{cases} \gamma_\mu & X = V \\ \gamma_5 \gamma_\mu & X = PV \end{cases} \quad K = \begin{cases} 1 & X = P \\ -1 & X = w \phi, A, B \end{cases}$$

Die Rechnungen wurden mit dem Ansatz (2.11b) ($n_2 = 0$) ausgeführt. Zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten werden die folgenden Größen benötigt:

$$n_1 = 1; \quad n_2 = 0; \quad n_3 = 0$$

$$\lambda = +1$$

$$M^{(1)} = \mu_2$$

$$\lambda_{\lambda} = \begin{cases} 1 & \times V \\ -1 & \times PV \end{cases}$$

$$\bar{M}_1^{(\lambda)} = M_1^{(\lambda)} \quad \lambda = 1, 2$$

$$\bar{M}_3^{(j)} = M_3^{(j)} \quad j = 1, 2$$

Für die weiteren Rechnungen ist es zweckmäßig, $\bar{a}$ wie folgt zu zerlegen:

$$\bar{a} = \bar{c} \cdot \cos \nu + \bar{d}$$

Für die Größen $\bar{b}$, $\bar{c}$ und $\bar{d}$ erhält man dann:

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} \left\{ 2(m_3^{(j)} - m_1^{(i)}) + \frac{1}{\mu_2^2} [m_3^{(j)} m_1^{(i)2} - m_1^{(i)} m_3^{(j)2}] \right\} \frac{1}{b_1^2 - M_1^{(i)2} + \lambda \varepsilon} \frac{1}{b_2^2 - \mu_2^2 + \lambda \varepsilon} \frac{1}{b_3^2 - M_3^{(j)2} + \lambda \varepsilon} \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} 4kg \frac{1}{b_1^2 - M_1^{(i)2} + \lambda \varepsilon} \frac{1}{b_2^2 - \mu_2^2 + \lambda \varepsilon} \frac{1}{b_3^2 - M_3^{(j)2} + \lambda \varepsilon} \\ &\quad \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} \left\{ -4\rho_{10}\rho_{20} - 2M(m_1^{(i)} + m_3^{(j)}) - 2(m_1^{(i)2} + m_3^{(j)2}) + 4m_1^{(i)} m_3^{(j)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu_2^2} [-m_1^{(i)} m_3^{(j)} b_2^2 + m_1^{(i)2} m_3^{(j)2} + 2M(m_1^{(i)} m_3^{(j)2} + m_1^{(i)2} m_3^{(j)}) + 4M^2 m_1^{(i)} m_3^{(j)}] \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{b_1^2 - M_1^{(i)2} + \lambda \varepsilon} \frac{1}{b_2^2 - \mu_2^2 + \lambda \varepsilon} \frac{1}{b_3^2 - M_3^{(j)2} + \lambda \varepsilon} \end{aligned}$$

Die in den Entwicklungskoeffizienten direkt auftretenden Größen $F_{il}^{(1)}$ lauten:

$$\begin{aligned} F_{12e}^{(1)} &= (\pm \bar{a} - \bar{b} b_{20}) Q_e(Z_1) Q_e(Z_2) & \tilde{F}_{12e}^{(1)} &= \mp 4\rho_{10}\rho_{20} \tilde{B}_{5e}^{(2)} + 2M \tilde{B}_{6e}^{(2)} + 2\tilde{B}_{7e}^{(2)} + 4\tilde{B}_{8e}^{(2)} - 2\tilde{B}_{9e}^{(2)} \\ & & &+ \frac{1}{\mu_2^2} [\pm \tilde{B}_{9e}^{(2)} \pm 2M \tilde{B}_{10e}^{(2)} \pm 4M^2 \tilde{B}_{9e}^{(2)} - \tilde{B}_{11e}^{(2)}] \end{aligned}$$

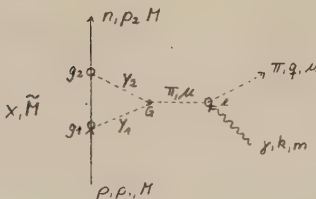
$$F_{3e}^{(1)} = \bar{c} Q_e(Z_1) Q_e(Z_2) \quad \tilde{F}_{3e}^{(1)} = 4kg \tilde{B}_{5e}^{(2)}$$

$$F_{4e}^{(1)} = -\bar{b} b_2 [Z_1 Q_e(Z_1) - \delta_{0e}] Q_e(Z_2) \quad \tilde{F}_{4e}^{(1)} = -2\tilde{B}_{2e}^{(2)} - \frac{1}{\mu_2^2} \tilde{B}_{12e}^{(2)}$$

$$F_{5e}^{(1)} = \bar{b} b_2 DE_e^{(10)}(Z_1) Q_e(Z_2) \quad \tilde{F}_{5e}^{(1)} = 2\tilde{B}_{4e}^{(2)} + \frac{1}{\mu_2^2} \tilde{B}_{13e}^{(2)}$$

$\sim(2)$
Die Größen B_{ii} , $i = 1, \dots, 13$, wurden bereits in Abschnitt 6.1.2. definiert.

7.1.2. Der Graph



Das Matrixelement lautet:

$$\begin{aligned}
 -i T_{fi}^{(A)} &= \frac{i}{(2\pi)^4} g_1 g_2 \epsilon GF \frac{\Sigma F \pi^v}{t - \mu^2} 2 \epsilon(k, \lambda) \cdot q \cdot \\
 &\cdot \sum_{a=1}^{n_{1,2}} \sum_{j=1}^{n_{1,2}} (-1)^{a+j} \sum_{k=1}^2 \int d^4 b_2 \frac{1}{b_3^2 - m_{k,5}^{(j)2} + i \epsilon} \frac{1}{b_4^2 - m_{k,6}^{(j)2} + i \epsilon} \cdot \\
 &\cdot \bar{u}(p_2, s_2) \gamma_5 [A + (-1)^{k+A} B b_2] u(p_1, s_1)
 \end{aligned}$$

wobei die Massen der Propagatoren gegeben sind durch die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 m_{1,5}^{(j)} &= \mu_5^{(j)} & m_{1,6}^{(k)} &= \mu_6^{(k)} \\
 m_{2,5}^{(j)} &= \mu_5^{(j)} & m_{2,6}^{(k)} &= \mu_6^{(k)}
 \end{aligned}$$

Rechnungen zu diesem Graphen wurden mit den Ansätzen (2.11a) ($n_2 = 1$) und (2.11b) ($n_2 = 0$) durchgeführt. Zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten sind die folgenden Größen erforderlich:

$$n_1 = 0, 1; \quad n_2 = 1; \quad n_3 = 0$$

$$\lambda = -1$$

$$\tilde{M}_a^{(k)} = m_{b,k}^{(k)} \quad i = 1, 2; \quad k = 1, 2$$

$$\tilde{M}_3^{(j)} = m_{k,5}^{(j)} \quad j = 1, 2; \quad k = 1, 2$$

$$M^{(1)} = \tilde{M}, \quad M^{(2)} = M_5, \quad M_3^{(2)} = M_6$$

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^{n_{i,1}} \sum_{j=1}^{n_{i,2}} (-1)^{i+j} \sum_{k=1}^2 A \frac{1}{b_1^2 - m_{k,6}^{(i,j)^2} + \lambda \cdot \epsilon} \quad \frac{1}{b_2^2 - \tilde{H}^2 + \lambda \cdot \epsilon} \quad \frac{1}{b_3^2 - m_{k,5}^{(j)^2} + \lambda \cdot \epsilon}$$

$$\bar{b} = \sum_{i=1}^{n_{i,1}} \sum_{j=1}^{n_{i,2}} (-1)^{i+j} \sum_{k=1}^2 B \frac{(-1)^{k+1}}{b_1^2 - m_{k,6}^{(i,j)^2} + \lambda \cdot \epsilon} \quad \frac{1}{b_2^2 - \tilde{H}^2 + \lambda \cdot \epsilon} \quad \frac{1}{b_3^2 - m_{k,5}^{(j)^2} + \lambda \cdot \epsilon}$$

$$B_{1\ell}^{(5)} = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} Q_\ell(Z_1) Q_\ell(Z_2) \Big|_{\substack{\bar{M}_1 = m_{k,6}^{(i)} \\ \bar{M}_3 = m_{k,5}^{(j)}}} \quad B_{3\ell}^{(5)} = \sum_{k=1}^2 b_{20} Q_\ell(Z_1) Q_\ell(Z_2) \Big|_{\substack{\bar{M}_1 = m_{k,6}^{(i)} \\ \bar{M}_3 = m_{k,5}^{(j)}}}$$

$$B_{2\ell}^{(5)} = \sum_{k=1}^2 b_2 [Z_1 Q_\ell(Z_1) - \delta_{0\ell}] Q_\ell(Z_2) \Big|_{\substack{\bar{M}_1 = m_{k,6}^{(i)} \\ \bar{M}_3 = m_{k,5}^{(j)}}} \quad B_{4\ell}^{(5)} = \sum_{k=1}^2 b_2 DE_\ell^{MO}(Z_1) Q_\ell(Z_2) \Big|_{\substack{\bar{M}_1 = m_{k,6}^{(i)} \\ \bar{M}_3 = m_{k,5}^{(j)}}}$$

$$B_{i+4\ell}^{(5)} = (b_2^2 - \tilde{H}^2) B_{i,\ell}^{(5)} \quad i = 1, \dots, 4$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{1\ell}^{(i)} &= \mathcal{D}_1 \tilde{B}_{1\ell}^{(5)} + \mathcal{D}_2 \tilde{B}_{5\ell}^{(5)} - \mathcal{D}_3 \tilde{B}_{3\ell}^{(5)} - \mathcal{D}_4 \tilde{B}_{7\ell}^{(5)} & \tilde{F}_{4\ell}^{(i)} &= -\mathcal{D}_3 \tilde{B}_{1\ell}^{(5)} - \mathcal{D}_4 \tilde{B}_{6\ell}^{(5)} \\ \tilde{F}_{2\ell}^{(i)} &= -(\mathcal{D}_1 \tilde{B}_{1\ell}^{(5)} + \mathcal{D}_2 \tilde{B}_{5\ell}^{(5)} + \mathcal{D}_3 \tilde{B}_{3\ell}^{(5)} + \mathcal{D}_4 \tilde{B}_{7\ell}^{(5)}) & \tilde{F}_{5\ell}^{(i)} &= \mathcal{D}_3 \tilde{B}_{4\ell}^{(5)} + \mathcal{D}_4 \tilde{B}_{8\ell}^{(5)} \\ \tilde{F}_{3\ell}^{(i)} &= 0 \end{aligned}$$

Die hier nicht aufgeführten Größen wurden bereits in Abschn. 6.2.2. definiert.

7.2. Graphen vom Typ

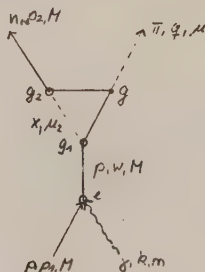


Graphen dieses Typs tragen nur zur niedrigsten Partialwelle (s-Welle) bei. Der Entwicklungskoeffizient lautet:

$$a_{1/2}^{(0)} = \lambda \text{const.} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{q} \frac{F_2^0}{s-H^2} \cdot \left\{ \delta_{0A} \frac{m}{k} \left[2s_1 N_5 (\rho_{10} + M)(\omega - M) \tilde{F}_{1,0}^{(2)} + 2s_2 N_6 (\rho_{10} - M)(\omega + M) \tilde{F}_{2,0}^{(2)} \right. \right. \\ \left. \left. + 2s_2 N_5 k (\omega + M) \tilde{F}_{1,1}^{(2)} - 2s_1 N_6 k (\omega - M) \tilde{F}_{2,1}^{(2)} \right] \right. \\ \left. - \delta_{1/1,1} \delta_{2s_1,1} \sqrt{2} \left[2s_1 N_1 \tilde{F}_{1,0}^{(2)} + 2s_2 N_2 \tilde{F}_{2,0}^{(2)} \right. \right. \\ \left. \left. + 2s_2 N_3 \tilde{F}_{1,1}^{(2)} - 2s_1 N_4 \tilde{F}_{2,1}^{(2)} \right] \right\}$$

Die zur Berechnung des Entwicklungskoeffizienten notwendigen Definitionen sind in den nachstehenden Unterabschnitten angegeben.

7.2.1. Der Graph



Ist X ein Spin 0-Teilchen, dann erhält man für T_{fi} :

$$= \frac{i}{(2\pi)^4} K g_0 g_2 g_e \Lambda_2^+ T \Lambda_1 \frac{F^0}{S \cdot H^2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} \int d^4 b_i \frac{1}{b_i^2 \mu_i^2 + i\epsilon} \frac{1}{[b_i^2 \mu_i^{(j)2} + i\epsilon]^{2n_2}} \frac{1}{b_i^2 \mu_i^{(j)2} + i\epsilon} \frac{1}{b_i^2 \mu_i^{(i)2} + i\epsilon} \cdot$$

$$\cdot \bar{u}(p_2, s_2) T(b_3 + M_3^{(j)}) \gamma_5 (b_4 + M_4^{(i)}) T(x + M) \mathcal{E}(k, \lambda) u(p_1, s_1)$$

mit den gleichen Definitionen für Γ und κ wie in Abschnitt 7.1.1.

Für diesen Fall wurden Rechnungen mit den Ansätzen (2.11a) ($n_2 = 1$) und (2.11b) ($n_2 = 0$) durchgeführt.

Die folgenden Definitionen sind zur Berechnung von a_j erforderlich:

$$n_1 = 1; \quad n_2 = 0; \quad n_3 = 1$$

$$\lambda = -1$$

$$M^{(1)} = \mu_2; \quad M^{(2)} = \mu_2^{(2)}; \quad M^{(3)} = \mu_2^{(2)}$$

$$\lambda_x = \begin{pmatrix} 1 & x & PS \\ -1 & x & S \end{pmatrix}$$

$$\bar{M}_1^{(i)} = M_1^{(i)} \quad i = 1, 2$$

$$\bar{M}_3^{(j)} = M_3^{(j)} \quad j = 1, 2$$

$$s_1 = \underline{b}_2 Q_e(Z_2)$$

$$s_2 = \underline{b}_2 b_{20} Q_e(Z_2)$$

$$s_3 = \underline{b}_2^2 Q_e(Z_2)$$

$$s_4 = b_2^2 \underline{b}_2^2 Q_e(Z_2)$$

$$s_5 = b_{20} \underline{b}_2^2 Q_e(Z_2)$$

$$s_6 = \underline{b}_2 b_2^2 Q_e(Z_2)$$

$$s_7 = \underline{b}_2 b_{20} b_2^2 Q_e(Z_2)$$

$$s_8 = \underline{b}_2 b_{20}^2 Q_e(Z_2)$$

$$\tilde{B}_{1e}^{(6)} = (m_3^{(j)} - m_1^{(i)}) s_1$$

$$\tilde{B}_{2e}^{(6)} = m_1^{(i)} s_1$$

$$\tilde{B}_{3e}^{(6)} = (m_2^{(j)} - m_4^{(i)}) s_2$$

$$\tilde{B}_{4e}^{(6)} = m_4^{(i)} s_2$$

$$\tilde{B}_{5e}^{(6)} = s_6 - m_1^{(i)} m_3^{(j)} s_1$$

$$\tilde{B}_{6e}^{(6)} = s_2$$

$$\tilde{B}_{7e}^{(6)} = s_3$$

$$\tilde{B}_{8e}^{(6)} = (m_2^{(j)} - m_4^{(i)}) s_3$$

Die direkt in a_j auftretenden Größen sind:

$$\tilde{F}_{\{2\}}^{(2)} = \mp (s - M^2) (\pm \tilde{B}_{1,0}^{(6)} \pm \tilde{B}_{2,0}^{(6)} + \tilde{B}_{6,0}^{(6)}) + (\omega \mp M) (\tilde{B}_{3,0}^{(6)} + \tilde{B}_{5,0}^{(6)})$$

$$\tilde{F}_{\{2,1\}}^{(6)} = (s - M^2) \tilde{B}_{7,1}^{(6)} \pm (\omega \pm M) \tilde{B}_{8,1}^{(6)}$$

Ist X ein Spin 1-Teilchen, so erhält man:

$$i^{(2)} = -\frac{i}{(2\pi)^4} K g_1 g_2 g e \Lambda_2^+ T \Lambda_1 \frac{F_2^{\mu}}{s-M^2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} \int d^4 b_2 \frac{-g^{\mu\nu} + \frac{b_2^\mu b_2^\nu}{\mu_2^2}}{b_2^2 - \mu_2^2 + i\epsilon} \frac{1}{b_3^2 - M_3^{(1)2} + i\epsilon} \frac{1}{b_4^2 - M_4^{(1)2} + i\epsilon} \cdot$$

$$\cdot \bar{u}(p_2, s_2) T_\mu (b_3 + M_3^{(1)}) \gamma_5 (b_4 + M_4^{(1)}) T_\nu (b + M) \mathcal{E}(k, \lambda) u(p_1, s_1)$$

Hierbei wurden für Γ_μ , Γ_ν und κ die gleichen Definitionen wie in Abschn. 7.1.1. für den Spin 1-Fall benutzt.

Dieser Fall wurde nur mit Ansatz (2.11b) ($n_2 = 0$) berechnet. Es gelten die folgenden Definitionen:

$$n_1 = 1; \quad n_2 = 0; \quad n_3 = 1$$

$$\lambda = 1$$

$$\lambda_x = \begin{pmatrix} 1 & x & v \\ -1 & x & pv \end{pmatrix}$$

$$\bar{M}_i^{(i)} = M_i^{(i)} \quad i = 1, 2$$

$$\bar{M}_j^{(j)} = M_j^{(j)} \quad j = 1, 2$$

$$B_{3e}^{(6)} = m_3^{(j)^2} s_3$$

$$B_{10e}^{(6)} = m_3^{(j)} s_3$$

$$B_{11e}^{(6)} = m_3^{(j)^2} m_1^{(i)} s_3$$

$$B_{12e}^{(6)} = m_3^{(j)} m_1^{(i)} s_3$$

$$B_{13e}^{(6)} = m_3^{(j)} s_4$$

$$B_{14e}^{(6)} = m_3^{(j)} s_5$$

$$B_{15e}^{(6)} = s_4$$

$$B_{16e}^{(6)} = m_3^{(j)^2} s_4$$

$$B_{17e}^{(6)} = s_6$$

$$B_{11e}^{(6)} = m_1^{(i)} m_3^{(j)} s_4$$

$$B_{13e}^{(6)} = m_1^{(i)} m_3^{(j)^2} s_2$$

$$B_{20e}^{(6)} = m_1^{(i)} m_3^{(j)} s_2$$

$$B_{21e}^{(6)} = m_3^{(j)} s_7$$

$$B_{22e}^{(6)} = m_3^{(j)} s_8$$

$$B_{23e}^{(6)} = m_1^{(i)} m_3^{(j)} s_6$$

$$B_{24e}^{(6)} = m_3^{(j)^2} s_6$$

$$B_{25e}^{(6)} = m_3^{(j)} s_6$$

$$B_{26e}^{(6)} = m_3^{(j)^2} s_2$$

$$B_{27e}^{(6)} = m_3^{(j)} s_2$$

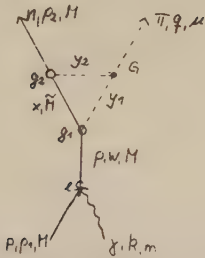
Die $B_{il}^{(6)}$, $i = 1, \dots, 8$, sowie s_i , $i = 1, \dots, 8$, wurden in diesem Abschnitt bereits definiert.

Für die $F_{il}^{(2)}$ gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 1,0 \\ 2,0 \end{Bmatrix}}^{(2)} = & \pm (\omega \mp H) \left\{ 4\omega p_{20} \tilde{B}_{15,0}^{(6)} + 2\tilde{B}_{16,0}^{(6)} - 4\omega \tilde{B}_{6,0}^{(6)} + 2\tilde{B}_{17,0}^{(6)} - 4\tilde{B}_{11,0}^{(6)} + 2H\tilde{B}_{11,0}^{(6)} \pm 2\tilde{B}_{3,0}^{(6)} \mp 2(\omega \pm H)(\tilde{B}_{11,0}^{(6)} + \tilde{B}_{20}^{(6)}) \right. \\ & \mp 2H(\omega \pm H)\tilde{B}_{15,0}^{(6)} \\ & \left. \pm \frac{1}{\mu_2} [-\tilde{B}_{13,0}^{(6)} - 2H\tilde{B}_{20,0}^{(6)} + \tilde{B}_{21,0}^{(6)} - 2\omega \tilde{B}_{22,0}^{(6)} \pm \tilde{B}_{23,0}^{(6)} \mp \tilde{B}_{24,0}^{(6)} \mp 2H\tilde{B}_{25,0}^{(6)} \mp 2\omega \tilde{B}_{26,0}^{(6)} \right. \\ & \left. \pm 4H\omega \tilde{B}_{27,0}^{(6)} + (\omega \pm H)(\mp \tilde{B}_{26,0}^{(6)} \mp 2H\tilde{B}_{27,0}^{(6)} + \tilde{B}_{25,0}^{(6)}) \right] \end{aligned}$$

$$\tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 1,1 \\ 2,1 \end{Bmatrix}}^{(2)} = \pm 2(\omega \pm H) \tilde{B}_{9,1}^{(6)} \pm \frac{\omega \pm H}{\mu_2^2} \left[\pm (\omega \mp H)(\tilde{B}_{3,1}^{(6)} + 2H\tilde{B}_{10,1}^{(6)}) - \tilde{B}_{11,1}^{(6)} - 2H\tilde{B}_{12,1}^{(6)} + \tilde{B}_{13,1}^{(6)} - 2\omega \tilde{B}_{14,1}^{(6)} \right] \}$$

7.2.2. Der Graph



Man erhält für T_{fi} :

$$-i T_{fi}^{(2)} = \frac{i}{(2\pi)^4} g_1 g_2 \epsilon GF \frac{F_2}{S-H^2} \sum_{a=1}^{n_1-1} \sum_{j=1}^{n_1+1} (-1)^{aj} \sum_{k=1}^2 \int d^4 b_2 \frac{1}{b_2^2 - \mu_{k,5}^{(j)2} + i\epsilon} \frac{1}{b_4^2 - \mu_{k,6}^{(j)2} + i\epsilon} \cdot \bar{u}(p_2, s_2) \gamma_5 \{ A(x\mathcal{L} + M\mathcal{L}) + (-1)^{k-1} B(-x b_2 \mathcal{L} + M b_2 \mathcal{L} + 2w \cdot b_2 \mathcal{L}) \} u(p_1, s_1)$$

Rechnungen zu diesem Graphen wurden für die Ansätze (2.11a) ($n_2 = 1$) und (2.11b) ($n_2 = 0$) durchgeführt.

Es gelten die Definitionen:

$$n_1 = 0, 1, \quad n_2 = 0, 1, \quad n_3 = 0$$

$$\lambda = -1$$

$$\bar{H}_1^{(k)} = m_{k,6}^{(j)} \quad k = 1, 2; \quad j = 1, 2$$

$$\bar{H}_2^{(j)} = m_{k,5}^{(j)} \quad j = 1, 2; \quad k = 1, 2$$

$$M^{(a)} = \tilde{H} \quad ; \quad M^{(2)} = M_5 \quad ; \quad M^{(3)} = M_6$$

$$B_{1,1}^{(2)} = \sum_{k=1}^2 \frac{b_2}{b_4^2} \frac{Q_1(Z_2)}{m_{k,6}^{(1)} + 1} \frac{1}{\epsilon} \left| \overline{M}_3 = m_{k,5}^{(1)} \right|$$

$$B_{3,1}^{(2)} = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \frac{b_2}{b_4^2} \frac{Q_1(Z_2)}{m_{k,6}^{(1)} + 1} \frac{1}{\epsilon} \left| \overline{M}_3 = m_{k,5}^{(1)} \right|$$

$$B_{2,1}^{(2)} = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \frac{b_2}{b_4^2} \frac{b_{10}}{m_{k,6}^{(1)} + 1} \frac{Q_1(Z_2)}{\epsilon} \left| \overline{M}_3 = m_{k,5}^{(1)} \right|$$

$$B_{a+3,1}^{(2)} = (b_2^2 - \tilde{H}^2) B_{a,1}^{(2)} \quad a = 1, 2, 3$$

$$\tilde{\Phi}_1 = \mathcal{D}_1 \tilde{B}_{1,0}^{(2)} + \mathcal{D}_2 \tilde{B}_{4,0}^{(2)}$$

$$\tilde{\Phi}_2 = \mathcal{D}_3 \tilde{B}_{2,0}^{(2)} + \mathcal{D}_4 \tilde{B}_{5,0}^{(2)}$$

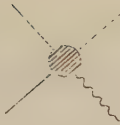
$$\tilde{\Phi}_3 = \mathcal{D}_3 \tilde{B}_{3,1}^{(2)} + \mathcal{D}_4 \tilde{B}_{6,1}^{(2)}$$

$$\tilde{F}_{\{2,0\}}^{(2)} = \tilde{\tau} (\omega + M) (\tilde{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_2)$$

$$\tilde{F}_{\{2,1\}}^{(2)} = \tilde{\tau} (\omega + M) \tilde{\Phi}_3$$

Die Definition der hier nicht aufgeführten Größen wurde bereits in Abschnitt 6.2.2. gegeben.

7.3. Graphen vom Typ



Die Partialwellenentwicklungskoeffizienten für diese Graphen haben die Form:

$$\begin{aligned}
 a_j^{(1)} &= \lambda \cdot \text{const.} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{F_1'}{2kq} \cdot \\
 &\left\{ \sum_{\ell=|j-1/2|}^{j+1/2} (2\ell+1) \left[\left(\frac{1}{2} s_1 - \lambda \ell 0 \mid \frac{1}{2} \ell j s_1 - \lambda \right) \left(\frac{1}{2} s_2 \ell 0 \mid \frac{1}{2} \ell j s_2 \right) \cdot \right. \right. \\
 &\quad \cdot \left[-\delta_{A1\lambda1} \delta_{2s_1\lambda} \sqrt{2} (2s_1 N_1 \tilde{F}_{1\ell}^{(3)} + 2s_2 N_2 \tilde{F}_{2\ell}^{(3)} + 2s_1 N_3 \tilde{F}_{3\ell}^{(3)} + 2s_2 N_4 \tilde{F}_{4\ell}^{(3)}) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \delta_{0\lambda} \frac{m}{k} (2s_1 N_5 \tilde{F}_{5\ell}^{(3)} + 2s_2 N_6 \tilde{F}_{6\ell}^{(3)}) \right] \right. \\
 &\quad + 2 \left(\frac{1}{2} s_1 \ell - \lambda \mid \frac{1}{2} \ell j s_1 - \lambda \right) \left(\frac{1}{2} s_2 \ell 0 \mid \frac{1}{2} \ell j s_2 \right) \cdot \\
 &\quad \left[-\delta_{A1\lambda1} (2s_1 N_1 \tilde{F}_{1\ell}^{(4)} + 2s_2 N_2 \tilde{F}_{2\ell}^{(4)} + 2s_1 N_3 \tilde{F}_{3\ell}^{(4)} + 2s_2 N_4 \tilde{F}_{4\ell}^{(4)} \right. \\
 &\quad \left. + \delta_{2s_1\lambda} (2s_1 N_3 \tilde{F}_{3\ell}^{(5)} + 2s_2 N_4 \tilde{F}_{4\ell}^{(5)}) \right] \\
 &\quad + \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} s_1 \ell 2s_1 - \lambda \mid \frac{1}{2} \ell j s_1 - \lambda \right) \left(\frac{1}{2} s_2 \ell 0 \mid \frac{1}{2} \ell j s_2 \right) \cdot \\
 &\quad \left. \left[-\delta_{A1\lambda1} \delta_{2s_1\lambda} (2s_1 N_1 \tilde{F}_{1\ell}^{(5)} + 2s_2 N_2 \tilde{F}_{2\ell}^{(5)}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \delta_{0\lambda} \frac{m}{k} (2s_1 N_5 \tilde{F}_{5\ell}^{(5)} + 2s_2 N_6 \tilde{F}_{6\ell}^{(5)}) \right] \right\} \\
 &+ \sum_{j'=1/2}^{3/2} \left(\frac{1}{2} s_1 - \lambda 1 0 \mid \frac{1}{2} 1 j s_1 - \lambda \right) \left(\frac{1}{2} s_2 1 0 \mid \frac{1}{2} \ell j s_2 \right) \cdot \\
 &\cdot \sum_{\ell=|j'-1/2|}^{j'+1/2} (2\ell+1) \left(\frac{1}{2} s_1 - \lambda \ell 0 \mid \frac{1}{2} \ell j s_1 - \lambda \right) \left(\frac{1}{2} s_2 \ell 0 \mid \frac{1}{2} \ell j s_2 \right) \cdot \\
 &\cdot \left[-\delta_{A1\lambda1} \delta_{2s_1\lambda} \sqrt{2} (2s_1 N_1 \tilde{F}_{1\ell}^{(6)} + 2s_2 N_2 \tilde{F}_{2\ell}^{(6)} + 2s_1 N_3 \tilde{F}_{3\ell}^{(6)} + 2s_2 N_4 \tilde{F}_{4\ell}^{(6)}) \right. \\
 &\quad \left. + \delta_{0\lambda} \frac{m}{k} (2s_1 N_5 \tilde{F}_{5\ell}^{(6)} + 2s_2 N_6 \tilde{F}_{6\ell}^{(6)}) \right]
 \end{aligned}$$

$$+ 2 \sum_{j=1/2}^{3/2} (1/2 s_1 10 | 1/2 1 j s_1) (1/2 s_2 10 | 1/2 1 j s_2) \cdot$$

$$\sum_{\ell=|j-j_1|}^{j_1+j_2} (2\ell+1) (j s_1 \ell - \lambda | j \ell j s_1 - \lambda) (j s_2 \ell 0 | j \ell j s_2) \cdot$$

$$\cdot [-\delta_{11\lambda} \delta_{2s_1\lambda} (2s_1 N_3 \tilde{F}_{3\ell}^{(1)} + 2s_2 N_4 \tilde{F}_{4\ell}^{(1)})]$$

$$+ \sqrt{2} \sum_{j=1/2}^{3/2} (1/2 -s_1 10 | 1/2 1 j -s_1) (1/2 s_2 10 | 1/2 1 j s_2) \cdot$$

$$\sum_{\ell=|j-j_1|}^{j_1+j_2} (2\ell+1) (j -s_1 \ell 2s_1 - \lambda | j \ell j s_1 - \lambda) (j s_2 \ell 0 | j \ell j s_2) \cdot$$

$$\cdot [\delta_{0\lambda} \frac{m}{\hbar} (2s_1 N_5 \tilde{F}_{5\ell}^{(1)} + 2s_2 N_6 \tilde{F}_{6\ell}^{(1)})]$$

$$+ \sum_{j=1/2}^{3/2} (1/2 s_1 1 - \lambda | 1/2 1 j s_1 - \lambda) (1/2 s_2 10 | 1/2 1 j s_2) \cdot$$

$$\sum_{\ell=|j-j_1|}^{j_1+j_2} (2\ell+1) (j s_1 - \lambda \ell 0 | j \ell j s_1 - \lambda) (j s_2 \ell 0 | j \ell j s_2) \cdot$$

$$\cdot [\delta_{11\lambda} (2s_1 N_1 \tilde{F}_{1\ell}^{(3)} + 2s_2 N_2 \tilde{F}_{2\ell}^{(3)} + 2s_1 N_3 \tilde{F}_{3\ell}^{(3)} + 2s_2 N_4 \tilde{F}_{4\ell}^{(3)})]$$

$$+ \delta_{0\lambda} \frac{m}{\hbar} (2s_1 N_5 \tilde{F}_{5\ell}^{(3)} + 2s_2 N_6 \tilde{F}_{6\ell}^{(3)})]$$

$$+ \sum_{j=1/2}^{3/2} (1/2 -s_1 1 - \lambda | 1/2 1 j -s_1 - \lambda) (1/2 s_2 10 | 1/2 1 j s_2) \cdot$$

$$\sum_{\ell=|j-j_1|}^{j_1+j_2} (j -s_1 - \lambda \ell 2s_1 | j \ell j s_1 - \lambda) (j s_2 \ell 0 | j \ell j s_2) \cdot$$

$$\cdot [\delta_{11\lambda} \sqrt{2} (2s_1 N_1 \tilde{F}_{1\ell}^{(40)} + 2s_2 N_2 \tilde{F}_{2\ell}^{(40)})]$$

$$+ \delta_{0\lambda} \frac{m}{\hbar} (2s_1 N_5 \tilde{F}_{5\ell}^{(40)} + 2s_2 N_6 \tilde{F}_{6\ell}^{(40)})]$$

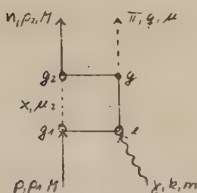
$$+ \delta_{j_1 j_2} [-\delta_{11\lambda} \delta_{2s_1\lambda} \sqrt{2} (2s_1 N_1 \tilde{F}_{1,0}^{(AA)} + 2s_2 N_2 \tilde{F}_{2,0}^{(AA)} + 2s_1 N_3 \tilde{F}_{3,1}^{(AA)} - 2s_1 N_4 \tilde{F}_{2,1}^{(AA)})]$$

$$+ \delta_{0\lambda} \frac{m}{\hbar} (2s_1 N_5 (p_{10} + M)(\omega - M) \tilde{F}_{1,0}^{(AA)} + 2s_2 N_6 (p_{10} - M)(\omega + M) \tilde{F}_{2,0}^{(AA)}$$

$$+ 2s_1 N_5 \hbar (\omega + M) \tilde{F}_{1,1}^{(AA)} - 2s_1 N_6 \hbar (\omega - M) \tilde{F}_{2,1}^{(AA)})]$$

Die Definitionen für die verschiedenen in $a_j^{(3)}$ auftretenden Größen werden in den Unterabschnitten angegeben.

7.3.1. Der Graph



Ist X ein Spin 0-Teilchen, so besitzt T_{fi} die folgende Form:

$$T_{fi}^{(3)} = \frac{i}{(2\pi)^3} M g_2 g_1 g e \Lambda_2^* T \Lambda_1 F_1 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} \int d^4 b_2 \frac{1}{b_2^2 - M_2^{(i,j)} + i\epsilon} \frac{1}{b_2^2 - M_2^{(2,1)} + i\epsilon} \frac{1}{b_2^2 - M_2^{(1,2)} + i\epsilon} \frac{1}{b_2^2 - M_2^{(2,2)} + i\epsilon} \frac{1}{b_2^2 - M_2^{(1,1)} + i\epsilon} \frac{1}{b_2^2 - M_2^{(2,2)} + i\epsilon} \cdot$$

$$\cdot \bar{u}(p_2, s_2) T (b_3 + M_3^{(j)}) \gamma_5 (b_4 + M_4^{(i)}) \mathcal{L}(k, \lambda) (b_n + M_n^{(i,j)}) T u(p_1, s_1)$$

Die Definition von Γ und κ für diesen Fall wurde bereits in Abschn. 7.1.1. gegeben.

Es wurden für diesen Fall Rechnungen mit den Ansätzen (2.11a) ($n_2 = 1$) und (2.11b) ($n_2 = 0$) ausgeführt. Die Partialwellenentwicklungskoeffizienten lassen sich mit Hilfe der folgenden Größen berechnen:

$$n_1 = 1; \quad n_2 = 0, 1; \quad n_3 = 1$$

$$\lambda = -1; \quad M^{(1)} = \mu_2; \quad M^{(2)} = \mu_2^{(2)}; \quad M^{(3)} = \mu_2^{(2)}$$

$$\lambda_x = \begin{pmatrix} 1 & x & P S \\ -1 & x & S \end{pmatrix}$$

$$\bar{M}_1^{(i)} = M_1^{(i)} \quad i = 1, 2$$

$$\bar{M}_3^{(j)} = M_3^{(j)} \quad j = 1, 2$$

$$u_1 = b_2^2 Q_e(z_1) Q_e(z_2)$$

$$u_2 = b_2^2 Q_e(z_1) Q_e(z_2)$$

$$u_3 = b_2^2 [Z_1^2 Q_e(z_1) - Z_1 \delta_{0e} - \frac{4}{3} \delta_{1e}] Q_e(z_2)$$

$$u_4 = b_{20} Q_e(z_1) Q_e(z_2)$$

$$u_5 = Q_e(z_1) Q_e(z_2)$$

$$u_6 = b_2 [Z_1 Q_e(z_1) - \delta_{0e}] Q_e(z_2)$$

$$u_7 = b_2 b_2^2 [Z_1 Q_e(z_1) - \delta_{0e}] Q_e(z_2)$$

$$u_8 = b_{20} b_2 [Z_1 Q_e(z_1) - \delta_{0e}] Q_e(z_2)$$

$$u_9 = b_{20} b_2^2 Q_e(z_1) Q_e(z_2)$$

$$u_{10} = [Z_1 Q_e(z_1) - \delta_{0e}] Q_e(z_2)$$

$$u_{11} = b_2 b_2^2 DE_e^{110}(z_1) Q_e(z_2)$$

$$u_{12} = b_2 DE_e^{110}(z_1) Q_e(z_2)$$

$$u_{13} = b_2 b_{20} DE_e^{110}(z_1) Q_e(z_2)$$

$$u_{14} = b_2^2 DE_e^{110}(z_1) Q_e(z_2)$$

$$u_{15} = b_2^2 DE_e^{210}(z_1) Q_e(z_2)$$

$$u_{16} = b_2^2 DE_e^{220}(z_1) Q_e(z_2)$$

$$u_{17} = u_1 + u_2 = b_{20}^2 Q_e(z_1) Q_e(z_2)$$

$$B_{1e}^{(n)} = u_1$$

$$B_{2e}^{(n)} = u_2$$

$$B_{3e}^{(n)} = -u_3$$

$$B_{4e}^{(n)} = (m_1^{(i)} + m_3^{(j)}) u_4$$

$$B_{5e}^{(n)} = m_3^{(j)} u_1 - m_1^{(i)} m_3^{(j)} u_5$$

$$B_{6e}^{(n)} = m_1^{(i)} m_3^{(j)} u_5$$

$$B_{7e}^{(n)} = -u_4 + m_1^{(i)} u_5$$

$$B_{8e}^{(n)} = 2u_1 u_4$$

$$B_{9e}^{(n)} = (m_3^{(j)} - m_1^{(i)}) u_3$$

$$B_{10e}^{(n)} = -(m_3^{(j)} - m_1^{(i)}) u_2$$

$$B_{11e}^{(n)} = m_3^{(j)} u_6$$

$$B_{12e}^{(n)} = m_1^{(i)} u_6$$

$$B_{13e}^{(n)} = -u_7 + m_1^{(i)} u_8$$

$$B_{14e}^{(n)} = 2u_1 u_8$$

$$B_{15e}^{(n)} = -u_9 + m_1^{(i)} u_4$$

$$B_{16e}^{(n)} = 2u_1 u_7$$

$$B_{17e}^{(n)} = (m_3^{(j)} - m_1^{(i)}) u_{17}$$

$$B_{18e}^{(n)} = u_{17} + m_3^{(j)} u_4$$

$$B_{19e}^{(n)} = u_1 - m_1^{(i)} m_3^{(j)} u_5$$

$$B_{20e}^{(n)} = u_9 - m_1^{(i)} m_3^{(j)} u_4$$

$$B_{21e}^{(n)} = u_7 - m_1^{(i)} m_3^{(j)} u_6$$

$$B_{22e}^{(n)} = (m_3^{(j)} - m_1^{(i)} - H) u_4$$

$$B_{23e}^{(n)} = u_{17} - m_3^{(j)} u_4$$

$$B_{24e}^{(n)} = u_{11} - m_1^{(i)} m_3^{(j)} u_{12}$$

$$B_{25e}^{(n)} = u_{13}$$

$$B_{26e}^{(n)} = m_3 u_{12}$$

$$B_{27e}^{(n)} = m_3 u_{13}$$

$$B_{28e}^{(n)} = m_1^{(i)} u_{13}$$

$$B_{29e}^{(n)} = -u_{11}$$

$$B_{30e}^{(n)} = m_1^{(i)} u_{12}$$

$$B_{31e}^{(n)} = m_1^{(i)} u_{12}$$

$$B_{32e}^{(n)} = m_1^{(i)} u_{13}$$

$$B_{33e}^{(n)} = m_3^{(j)} u_{14}$$

$$B_{34e}^{(n)} = m_1^{(i)} u_{14}$$

$$B_{35e}^{(n)} = u_{14}$$

$$B_{36e}^{(n)} = m_3^{(j)} u_{15}$$

$$B_{37e}^{(n)} = m_1^{(i)} u_{15}$$

$$B_{38e}^{(n)} = u_{15}$$

$$B_{39e}^{(n)} = m_3^{(j)} u_{16}$$

$$B_{40e}^{(n)} = m_1^{(i)} u_{16}$$

$$B_{41e}^{(n)} = u_{16}$$

Die in den Entwicklungskoeffizienten explizit auftretenden Größen lauten:

$$\tilde{F}_{\{2\ell\}}^{(3)} = \pm (\omega \mp H) (\tilde{B}_{4,\ell}^{(n)} + \tilde{B}_{2,\ell}^{(n)} + \tilde{B}_{3,\ell}^{(n)}) - (\omega \pm H) (\tilde{B}_{4,\ell}^{(n)} \pm \tilde{B}_{6,\ell}^{(n)}) + \tilde{B}_{5,\ell}^{(n)} \mp \tilde{B}_{9,\ell}^{(n)} + \tilde{B}_{10,\ell}^{(n)} - \tilde{B}_{15,\ell}^{(n)} - \tilde{B}_{16,\ell}^{(n)}$$

$$\tilde{F}_{\{3\ell\}}^{(3)} = - (\omega \pm H) \tilde{B}_{14,\ell}^{(n)} + (\omega \mp H) \tilde{B}_{12,\ell}^{(n)} + \tilde{B}_{13,\ell}^{(n)} + \tilde{B}_{14,\ell}^{(n)}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\{5\ell\}}^{(3)} &= (\rho_{10} \pm H) (\omega \mp H) [\tilde{F}_{\{2\ell\}}^{(3)} + (\omega \mp H) (\tilde{B}_{2,\ell}^{(n)} + \tilde{B}_{3,\ell}^{(n)}) + \tilde{B}_{9,\ell}^{(n)} + \tilde{B}_{10,\ell}^{(n)} + 2k_0 \tilde{B}_{3,\ell}^{(n)}] \\ &+ 2 \{ \mp k^2 [\tilde{B}_{20,\ell}^{(n)} \pm \tilde{B}_{17,\ell}^{(n)} - (\omega \pm H) \tilde{B}_{18,\ell}^{(n)}] \pm k [\tilde{B}_{2,\ell}^{(n)} \pm (k_0 - \rho_{10} \mp H) \tilde{B}_{22,\ell}^{(n)}] + k_0 (\rho_{10} \pm H) \tilde{B}_{9,\ell}^{(n)} \} \\ &\pm k (\omega \pm H) (\mp \tilde{F}_{\{3\ell\}}^{(3)} - \tilde{B}_{14,\ell}^{(n)} \mp 2k_0 \tilde{B}_{14,\ell}^{(n)}) \end{aligned}$$

$$\tilde{F}_{\{4\ell\}}^{(4)} = \frac{4}{3} \sqrt{3} [\pm (\omega \mp H) \tilde{B}_{30,\ell}^{(n)} + \tilde{B}_{36,\ell}^{(n)} - \tilde{B}_{37,\ell}^{(n)}]$$

$$\tilde{F}_{\{6\ell\}}^{(4)} = \pm \tilde{B}_{24,\ell}^{(n)} \mp (\omega \pm H) (\tilde{B}_{25,\ell}^{(n)} \pm \tilde{B}_{26,\ell}^{(n)}) + \tilde{B}_{27,\ell}^{(n)} - \tilde{B}_{28,\ell}^{(n)}$$

$$\tilde{F}_{\{3\ell\}}^{(5)} = \frac{2}{3} \sqrt{6} [\mp (\omega \mp H) \tilde{B}_{44,\ell}^{(n)} - \tilde{B}_{39,\ell}^{(n)} + \tilde{B}_{40,\ell}^{(n)}]$$

$$\tilde{F}_{\{6\ell\}}^{(5)} = \pm \tilde{B}_{23,\ell}^{(n)} \pm 2\omega \tilde{B}_{25,\ell}^{(n)} \pm \tilde{B}_{30,\ell}^{(n)} - (\omega \mp H) \tilde{B}_{34,\ell}^{(n)} + (\omega \pm H) \tilde{B}_{26,\ell}^{(n)}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\{6\ell\}}^{(5)} &= 2k (\rho_{10} \pm H) [\tilde{B}_{27,\ell}^{(n)} - \tilde{B}_{32,\ell}^{(n)} \pm (\omega \mp H) \tilde{B}_{25,\ell}^{(n)}] + \frac{2}{3} \sqrt{3} k_0 (\rho_{10} \pm H) [-\tilde{B}_{36,\ell}^{(n)} + \tilde{B}_{37,\ell}^{(n)} + (\omega \mp H) \tilde{B}_{38,\ell}^{(n)}] \\ &\mp k (\omega \pm H) [\tilde{B}_{29,\ell}^{(n)} \pm (\omega \pm H) \tilde{B}_{26,\ell}^{(n)} + (\omega \mp H) \tilde{B}_{34,\ell}^{(n)} + 2\omega \tilde{B}_{25,\ell}^{(n)} + \tilde{B}_{30,\ell}^{(n)}] \end{aligned}$$

$$\tilde{F}_{\{1\ell\}}^{(6)} = 0 \quad \lambda = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$\tilde{F}_{\{1\ell\}}^{(7)} = 0 \quad \lambda = 3, 4$$

$$\tilde{F}_{\{1\ell\}}^{(8)} = 0 \quad \lambda = 5, 6$$

$$\tilde{F}_{\{1\ell\}}^{(9)} = 0 \quad \lambda = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$\tilde{F}_{\{10\ell\}}^{(10)} = 0 \quad \lambda = 1, 2, 5, 6$$

$$\tilde{F}_{\{1\ell\}}^{(11)} = 0 \quad \begin{aligned} \lambda &= 1, 2 \\ \ell &= 0, 1 \end{aligned}$$

Ist X ein Spin 1-Teilchen, dann lautet das Matrixelement:

$$\begin{aligned}
 -\lambda' T_{fi}^{(3)} = & \frac{i}{(2\pi)^4} K g_1 g_2 g_e \Lambda_2^+ T \Lambda_1 F_1 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} \int d^4 b_2 \frac{1}{b_2^2 - M_1^{(i)2} + i\epsilon} \frac{-g^{\mu\nu} + \frac{b_2^\mu b_2^\nu}{b_2^2}}{b_2^2 - \mu_2^{2,1,1} + i\epsilon} \frac{1}{b_2^2 - M_3^{(j)2} + i\epsilon} \frac{1}{b_2^2 - M_4^{(i)2} + i\epsilon} \\
 & \cdot \bar{u}(p_2, s_2) T_{\mu} (b_3 + M_3^{(j)}) \gamma_5 (b_4 + M_4^{(i)}) \mathcal{L}(k, \lambda) (b_1 + M_1^{(i)}) T_{\nu} u(p_1, s_1)
 \end{aligned}$$

Für Γ_μ , Γ_ν und κ sind wieder die Definitionen von Abschnitt 7.1.1. einzusetzen für den gleichen Fall.

Auch hier wurden Rechnungen wieder nur mit dem Ansatz (2.11b) ($n_2 = 0$) ausgeführt. Die Definitionen für die einzelnen Größen sind:

$$n_1 = 1; \quad n_2 = 0; \quad n_3 = 1$$

$$\lambda = 1$$

$$M^{(i)} = \mu_2$$

$$\Lambda_X = \begin{cases} 1 & X = V \\ -1 & X = PV \end{cases}$$

$$\bar{H}_1^{(i)} = H_2^{(i)} \quad i = 1, 2$$

$$\bar{H}_3^{(j)} = H_3^{(j)} \quad j = 1, 2$$

$$B_{4,e}^{(1)} = U_6$$

$$B_{2,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_6$$

$$B_{3,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_7$$

$$B_{4,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_6$$

$$B_{5,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_6$$

$$B_{6,e}^{(2)} = m_4^{(i)} U_6$$

$$B_{7,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_6$$

$$B_{8,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_6$$

$$B_{9,e}^{(2)} = m_4^{(i)} U_5$$

$$B_{10,e}^{(2)} = U_5$$

$$B_{11,e}^{(2)} = m_3^{(j)} U_5$$

$$B_{12,e}^{(2)} = m_3^{(j)} U_4$$

$$B_{13,e}^{(2)} = U_4$$

$$B_{4,e}^{(2)} = m_4^{(i)} U_5$$

$$B_{15,e}^{(2)} = m_3^{(j)} U_5$$

$$B_{16,e}^{(2)} = m_4^{(i)} U_4$$

$$B_{17,e}^{(2)} = m_4^{(i)} U_4$$

$$B_{18,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_5$$

$$B_{19,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_4$$

$$B_{20,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_5$$

$$B_{21,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_5$$

$$B_{22,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_4$$

$$B_{23,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_4$$

$$B_{24,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_4$$

$$B_{25,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_5$$

$$B_{26,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_5$$

$$B_{27,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_4$$

$$B_{28,e}^{(2)} = m_4^{(i)} U_4$$

$$B_{29,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_4$$

$$B_{30,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_7$$

$$B_{31,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_4$$

$$B_{32,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_5$$

$$B_{33,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_3$$

$$B_{34,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_3$$

$$B_{35,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_3$$

$$B_{36,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_2$$

$$B_{37,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_2$$

$$B_{38,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_2$$

$$B_{39,e}^{(2)} = U_9$$

$$B_{40,e}^{(2)} = m_4^{(i)} U_6$$

$$B_{41,e}^{(2)} = m_3^{(j)} U_6$$

$$B_{42,e}^{(2)} = U_4$$

$$B_{43,e}^{(2)} = m_3^{(j)} U_4$$

$$B_{44,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_4$$

$$B_{45,e}^{(2)} = m_3^{(j)} U_6$$

$$B_{46,e}^{(2)} = m_4^{(i)} U_6$$

$$B_{47,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_6$$

$$B_{48,e}^{(2)} = m_3^{(j)} U_{17}$$

$$B_{49,e}^{(2)} = m_4^{(i)} U_{17}$$

$$B_{50,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_{17}$$

$$B_{51,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_{17}$$

$$B_{52,e}^{(2)} = m_3^{(j)} U_8$$

$$B_{53,e}^{(2)} = m_4^{(i)} U_8$$

$$B_{54,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_8$$

$$B_{55,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_8$$

$$B_{56,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_{15}$$

$$B_{57,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_{15}$$

$$B_{58,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_{15}$$

$$B_{59,e}^{(2)} = U_{12}$$

$$B_{60,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_{13}$$

$$B_{61,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_{11}$$

$$B_{62,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_{12}$$

$$B_{63,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_{12}$$

$$B_{64,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_{12}$$

$$B_{65,e}^{(2)} = m_3^{(j)} U_{12}$$

$$B_{66,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_{12}$$

$$B_{67,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_{14} \cdot B_{61,e}^{(2)}$$

$$B_{68,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_{13}$$

$$B_{69,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_{13}$$

$$B_{70,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_{16}$$

$$B_{71,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_{16}$$

$$B_{72,e}^{(2)} = m_4^{(i)} m_3^{(j)} U_{16}$$

$$B_{73,e}^{(2)} = U_{16}$$

$$B_{74,e}^{(2)} = 2k s_4$$

$$B_{75,e}^{(2)} = 2k m_3^{(j)} s_4$$

$$B_{76,e}^{(2)} = 2k m_4^{(i)} s_4$$

$$B_{77,e}^{(2)} = 2k m_3^{(j)} s_4$$

$$B_{78,e}^{(2)} = 2k m_4^{(i)} m_3^{(j)} s_4$$

$$B_{79,e}^{(2)} = 2k m_3^{(j)} s_2$$

$$B_{80,e}^{(2)} = 2k m_3^{(j)} s_2$$

$$B_{81,e}^{(2)} = 2k m_4^{(i)} m_3^{(j)} s_2$$

$$B_{82,e}^{(2)} = 2k m_3^{(j)} s_3$$

$$B_{83,e}^{(2)} = 2k m_3^{(j)} s_3$$

$$B_{84,e}^{(2)} = 2k m_4^{(i)} m_3^{(j)} s_3$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\mu_2^2} \left\{ (\omega \pm H) \left[\mp (\rho_{10} \pm H) (\omega \pm H) (\tilde{B}_{34,e}^{(n)} - \tilde{B}_{35,e}^{(n)}) + (\rho_{10} \pm H) (\tilde{B}_{34,e}^{(n)} - \tilde{B}_{37,e}^{(n)} - \tilde{B}_{38,e}^{(n)} + \tilde{B}_{39,e}^{(n)}) - 4 H k^2 \tilde{B}_{24,e}^{(n)} - 2 k^2 \tilde{B}_{24,e}^{(n)} + 4 k k_0 H \tilde{B}_{44,e}^{(n)} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 2 k k_0 \tilde{B}_{54,e}^{(n)} + 2 k^2 \tilde{B}_{30,e}^{(n)} + 2 k (\rho_{10} \pm H - k_0) \tilde{B}_{24,e}^{(n)} \right] \right. \\
 & \quad \left. \pm \omega (4 k^2 \tilde{B}_{30,e}^{(n)} - 4 k k_0 \tilde{B}_{24,e}^{(n)}) \right. \\
 & \quad \left. \pm M (4 k^2 \tilde{B}_{19,e}^{(n)} - 4 k k_0 \tilde{B}_{14,e}^{(n)}) \right. \\
 & \quad \left. - 2 (\rho_{10} \pm H) k_0 [\tilde{B}_{33,e}^{(n)} - \tilde{B}_{34,e}^{(n)} + (\omega \pm H) \tilde{B}_{35,e}^{(n)}] + 2 k^2 (\tilde{B}_{24,e}^{(n)} - \tilde{B}_{44,e}^{(n)}) + 2 k k_0 (\tilde{B}_{34,e}^{(n)} - \tilde{B}_{44,e}^{(n)}) \right. \\
 & \quad \left. + 2 k^2 (\tilde{B}_{39,e}^{(n)} - \tilde{B}_{64,e}^{(n)}) + 2 k (\rho_{10} \pm H - k_0) (\tilde{B}_{54,e}^{(n)} - \tilde{B}_{55,e}^{(n)}) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\tilde{F}_{\{3e\}}^{(n)} = -\frac{1}{3} \sqrt{3} \left\{ -2 (\tilde{B}_{34,e}^{(n)} - \tilde{B}_{37,e}^{(n)}) + \frac{1}{\mu_2^2} [\tilde{B}_{54,e}^{(n)} - \tilde{B}_{57,e}^{(n)} + (\omega \pm H) \tilde{B}_{59,e}^{(n)}] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_{\{3e\}}^{(u)} &= \pm 2 \left\{ \tilde{B}_{64,e}^{(n)} - 2 \tilde{B}_{62,e}^{(n)} + \tilde{B}_{30,e}^{(n)} + \omega \tilde{B}_{14,e}^{(n)} + H (\omega \pm H) \tilde{B}_{53,e}^{(n)} + \tilde{B}_{27,e}^{(n)} + \tilde{B}_{32,e}^{(n)} + 2 \omega \rho_{20} \tilde{B}_{53,e}^{(n)} + H \tilde{B}_{24,e}^{(n)} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\mu_2^2} \left[-\omega \tilde{B}_{43,e}^{(n)} + \frac{1}{2} \tilde{B}_{44,e}^{(n)} + (\omega \pm H) (H \tilde{B}_{43,e}^{(n)} + \frac{1}{2} \tilde{B}_{57,e}^{(n)} + \frac{1}{2} \tilde{B}_{62,e}^{(n)}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} (\tilde{B}_{63,e}^{(n)} + \tilde{B}_{64,e}^{(n)} + \tilde{B}_{70,e}^{(n)}) - H \tilde{B}_{15,e}^{(n)} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\tilde{F}_{\{2e\}}^{(n)} = \frac{2}{3} \sqrt{6} \left\{ -2 (\tilde{B}_{39,e}^{(n)} - \tilde{B}_{40,e}^{(n)}) + \frac{1}{\mu_2^2} [\tilde{B}_{74,e}^{(n)} - \tilde{B}_{12,e}^{(n)} + (\omega \pm H) \tilde{B}_{13,e}^{(n)}] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_{\{4e\}}^{(s)} &= \pm 4 \left[-\omega (\rho_{10} + \rho_{20}) + \rho_{10} \rho_{20} + H^2 \right] \tilde{B}_{53,e}^{(n)} + 2 (\omega \pm H) (-\tilde{B}_{26,e}^{(n)} + \tilde{B}_{34,e}^{(n)}) \\
 & \quad + \frac{1}{\mu_2^2} \left[(\omega \pm H) (\tilde{B}_{65,e}^{(n)} - \tilde{B}_{67,e}^{(n)}) + 2 (H \tilde{B}_{65,e}^{(n)} + \omega \tilde{B}_{60,e}^{(n)}) + \tilde{B}_{64,e}^{(n)} + \tilde{B}_{67,e}^{(n)} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_{\{6e\}}^{(s)} &= -k (\omega \pm H) \tilde{F}_{\{3e\}}^{(s)} - 2 k_0 (\rho_{10} \pm H) \tilde{F}_{\{2e\}}^{(u)} \\
 & \quad - 4 k (\rho_{10} \pm H) (\tilde{B}_{32,e}^{(n)} - \tilde{B}_{27,e}^{(n)}) \\
 & \quad - 4 \omega k (\rho_{10} \pm H) \left[\pm (\omega \pm H) \tilde{B}_{53,e}^{(n)} - 2 \tilde{B}_{34,e}^{(n)} + 2 \tilde{B}_{24,e}^{(n)} \right] \\
 & \quad - 2 k (\rho_{10} \pm H) \frac{1}{\mu_2^2} [\tilde{B}_{69,e}^{(n)} - \tilde{B}_{70,e}^{(n)} + (\omega \pm H) \tilde{B}_{60,e}^{(n)}]
 \end{aligned}$$

$$\tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 1e \\ 2e \end{Bmatrix}}^{(6)} = 4 k \underline{q} \left[\tilde{B}_{3e}^{(2)} + (\omega \mp M) \tilde{B}_{10,e}^{(2)} \pm \tilde{B}_{13,e}^{(2)} \right]$$

$$\tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 3e \\ 4e \end{Bmatrix}}^{(6)} = \pm 4 k \underline{q} \tilde{B}_{1e}^{(2)}$$

$$\tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 5e \\ 6e \end{Bmatrix}}^{(6)} = (\rho_{10} \pm M) (\omega \mp M) \tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 1e \\ 2e \end{Bmatrix}}^{(6)} - k (\omega \pm M) \tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 3e \\ 4e \end{Bmatrix}}^{(6)}$$

$$\tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 3e \\ 4e \end{Bmatrix}}^{(7)} = \mp 4 k \underline{q} \tilde{B}_{59,e}^{(2)}$$

$$\tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 5e \\ 6e \end{Bmatrix}}^{(7)} = -k (\omega \pm M) \tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 3e \\ 4e \end{Bmatrix}}^{(7)}$$

$$\tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 1e \\ 2e \end{Bmatrix}}^{(8)} = \mp 4 \underline{q} (\omega \mp M) \tilde{B}_{1,e}^{(2)}$$

$$\tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 3e \\ 4e \end{Bmatrix}}^{(9)} = 4 \underline{q} \left[(\omega \mp M) (\tilde{B}_{9,e}^{(2)} + \tilde{B}_{13,e}^{(2)}) + \tilde{B}_{14,e}^{(2)} + \tilde{B}_{1,e}^{(2)} \right]$$

$$\tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 5e \\ 6e \end{Bmatrix}}^{(9)} = 4 k_0 \underline{q} \left\{ \mp k \left[\pm (\omega \mp M) (\tilde{B}_{9,e}^{(2)} + \tilde{B}_{13,e}^{(2)}) - \tilde{B}_{14,e}^{(2)} + \tilde{B}_{1,e}^{(2)} \right] \pm (\rho_{10} \pm M) (\omega \mp M) \tilde{B}_{1,e}^{(2)} \right\}$$

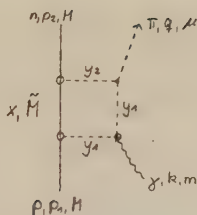
$$\tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 1e \\ 2e \end{Bmatrix}}^{(10)} = \pm 4 (\omega \mp M) \underline{q} \tilde{B}_{59,e}^{(2)}$$

$$\tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 5e \\ 6e \end{Bmatrix}}^{(10)} = \mp 4 (\omega \mp M) k \rho_{20} (\rho_{10} \pm M) \tilde{B}_{59,e}^{(2)}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 1,0 \\ 2,0 \end{Bmatrix}}^{(11)} &= 2 \left[\pm (\omega \mp M) \tilde{B}_{75,0}^{(2)} + \tilde{B}_{74,0}^{(2)} - \tilde{B}_{77,0}^{(2)} \right] \\ &+ \frac{1}{\mu_e^2} \left[(s - M^2) \tilde{B}_{76,0}^{(2)} + (\omega \mp M) (2M \tilde{B}_{76,0}^{(2)} \pm \tilde{B}_{81,0}^{(2)} + \tilde{B}_{77,0}^{(2)}) - \tilde{B}_{79,0}^{(2)} + \tilde{B}_{80,0}^{(2)} \pm \tilde{B}_{82,0}^{(2)} + \tilde{B}_{83,0}^{(2)} \right] \end{aligned}$$

$$\tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 1,1 \\ 2,1 \end{Bmatrix}}^{(11)} = \frac{1}{\mu_e^2} \left[\pm (\omega \mp M) \tilde{B}_{84,1}^{(2)} - \tilde{B}_{85,1}^{(2)} + \tilde{B}_{86,1}^{(2)} \right]$$

7.3.2. Der Graph



Das Matrixelement für diesen Graphen lautet:

$$-i T_f^{(3)} = \frac{i}{2\pi^4} g_1 g_2 e G F F_A^V \sum_{i=1}^{n_1+1} \sum_{j=1}^{n_2+1} (-1)^{i+j} \sum_{k=1}^2 \int d^4 b_2 \frac{1}{b_1^2 - m_{k,6}^2 + i\epsilon} \frac{1}{b_3^2 - m_{k,5}^2 + i\epsilon} \frac{1}{b_4^2 - m_{k,4}^2 + i\epsilon} \cdot 2\epsilon(k, \lambda) \cdot (p_1 - b_2) \cdot \bar{u}(p_2, s_2) \gamma^5 [A + (-1)^{2 \cdot 1} B b_2] u(p_1, s_1)$$

Die Rechnungen zu diesem Graphen wurden wieder mit den Ansätzen (2.11a)

($n_2 = 1$) und (2.11b) ($n_2 = 0$) durchgeführt. Es gelten die folgenden

Definitionen:

$$n_1 = 0, 1; \quad n_2 = 1; \quad n_3 = 0$$

$$\lambda = -1$$

$$\bar{M}_1^{(i)} = m_{k,6}^{(i)} \quad , \quad i = 1, 2; \quad k = 1, 2$$

$$\bar{M}_3^{(j)} = m_{k,5}^{(j)} \quad , \quad j = 1, 2; \quad k = 1, 2$$

$$M^{(1)} = \tilde{M}; \quad M^{(2)} = M_5; \quad M^{(3)} = M_6$$

$$V_1 = U_4$$

$$V_7 = U_8$$

$$V_2 = U_6$$

$$V_8 = U_3 - U_2$$

$$V_3 = U_{12}$$

$$V_9 = U_{15}$$

$$V_4 = U_5$$

$$V_{10} = U_{13}$$

$$V_5 = \frac{1}{2}(U_3 - U_2)$$

$$V_{11} = U_{16}$$

$$V_6 = U_1 + U_2$$

$$V_{i+11} = (b_2^2 - \tilde{M}^2) V_i \quad , \quad i = 1, \dots, 11$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= D_1 V_1 + D_2 V_{12} & \Phi_7 &= D_3 V_7 + D_4 V_{17} \\
 \Phi_2 &= D_1 V_4 + D_2 V_{15} & \Phi_8 &= D_3 V_8 + D_4 V_{18} \\
 \Phi_3 &= D_1 V_2 + D_2 V_{13} & \Phi_{10} &= D_3 V_6 + D_4 V_{16} \\
 \Phi_4 &= D_1 V_3 + D_2 V_{14} & \Phi_{11} &= D_3 V_9 + D_4 V_{20} \\
 \Phi_5 &= D_3 V_1 + D_4 V_{12} & \Phi_{12} &= D_3 V_{10} + D_4 V_{21} \\
 \Phi_6 &= D_3 V_6 + D_4 V_{17} & \Phi_{13} &= D_3 V_{11} + D_4 V_{22} \\
 \Phi_7 &= D_3 V_2 + D_4 V_{13} & \Phi_{14} &= D_3 V_3 + D_4 V_{14}
 \end{aligned}$$

$$B_{\ell', \ell}^{(3)} = \sum_{k=1}^2 \frac{\Phi_{\ell'}}{b_4^2 - m_{k,6}^{\ell_{(1)}^2} + \lambda \mathcal{E}} \Big|_{H_3 = m_{k,5}^{(1)}} \quad \ell' = 1, 2, 3, 4$$

$$B_{\ell', \ell}^{(3)} = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \frac{\Phi_{\ell'}}{b_4^2 - m_{k,6}^{\ell_{(1)}^2} + \lambda \mathcal{E}} \Big|_{H_3 = m_{k,5}^{(1)}} \quad \ell' = 5, \dots, 14$$

M_5, M_6, A und B sowie D_1, D_2, D_3, D_4 wurden bereits in Abschn. 6.2.2. definiert und die $U_i, i = 1, \dots, 16$, in Abschnitt 7.3.1.

Die in den Entwicklungskoeffizienten explizit auftretenden Größen lauten:

$$\tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 1\ell \\ 2\ell \end{Bmatrix}}^{(3)} = -\tilde{B}_{10,\ell}^{(3)}$$

$$\tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 3\ell \\ 4\ell \end{Bmatrix}}^{(3)} = 0$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 5\ell \\ 6\ell \end{Bmatrix}}^{(3)} = & \frac{1}{2} k^2 (\tilde{B}_{1,\ell}^{(3)} - \omega \tilde{B}_{2,\ell}^{(3)}) + k k_0 \tilde{B}_{3,\ell}^{(3)} + k^2 (\omega \tilde{B}_{5,\ell}^{(3)} - \tilde{B}_{6,\ell}^{(3)}) \\ & + (\rho_{10} \pm M) \omega k \tilde{B}_{7,\ell}^{(3)} - (\rho_{10} \pm M - k_0) k \tilde{B}_{8,\ell}^{(3)} + k_0 (\rho_{10} \pm M) \tilde{B}_{9,\ell}^{(3)} \end{aligned}$$

$$\tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 1\ell \\ 2\ell \end{Bmatrix}}^{(4)} = \frac{1}{6} \sqrt{3} \tilde{B}_{11,\ell}^{(3)}$$

$$\tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 3\ell \\ 4\ell \end{Bmatrix}}^{(4)} = \frac{1}{2} (\tilde{B}_{4,\ell}^{(3)} + \tilde{B}_{12,\ell}^{(3)})$$

$$\tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 1\ell \\ 2\ell \end{Bmatrix}}^{(5)} = -\frac{1}{3} \sqrt{6} \tilde{B}_{13,\ell}^{(3)}$$

$$\tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 3\ell \\ 4\ell \end{Bmatrix}}^{(5)} = 0$$

$$\tilde{F}_{\begin{Bmatrix} 5\ell \\ 6\ell \end{Bmatrix}}^{(5)} = (\rho_{10} \pm M) (-\omega k \tilde{B}_{14,\ell}^{(3)} + k \tilde{B}_{12,\ell}^{(3)} - \frac{1}{3} \sqrt{3} k_0 \tilde{B}_{11,\ell}^{(3)})$$

$$\tilde{F}_{i\ell}^{(6)} = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$\tilde{F}_{i\ell}^{(7)} = 0 \quad i = 3, 4$$

$$\tilde{F}_{i\ell}^{(8)} = 0 \quad i = 5, 6$$

$$\tilde{F}_{i\ell}^{(9)} = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$\tilde{F}_{i\ell}^{(10)} = 0 \quad i = 1, 2, 5, 6$$

$$\tilde{F}_{i\ell}^{(11)} = 0 \quad i = 1, 2; \ell = 0, 1$$

Ich danke meinem Doktorvater, Herrn Professor Dr. W. Kerler, für das Interesse, das er dieser Arbeit entgegengebracht hat, sowie für zahlreiche Diskussionen.

Herrn Dr. F. Gutbrod (DESY) danke ich ebenfalls, besonders für die hilfreiche Unterstützung bei den numerischen Integrationsverfahren.

Den Mitarbeitern des Rechenzentrums der Universität Marburg möchte ich Dank sagen für ihre Bemühungen um einen möglichst reibungslosen Ablauf des Rechenbetriebes; Herrn Dipl.-Phys. H. Pleyer und Herrn Dr. M. Glück bin ich für zahlreiche klärende Diskussionen dankbar.

Herrn Professor Dr. E. Hellner möchte ich dafür danken, daß er mir durch eine bis zur Beendigung dieser Arbeit halbtägige Beschäftigung die Möglichkeit gegeben hat, die Arbeit abzuschließen.

Meiner Mutter danke ich für das Schreiben der Arbeit und Frau V. Krawczak für das Anfertigen der Zeichnungen sowie das Schreiben der Formeln.

Die Arbeit wurde während der Dauer von 2 1/2 Jahren durch ein Promotionsstipendium nach dem Graduierten-Förderungs-Gesetz gefördert.

Lebenslauf

Am 9. Februar 1945 wurde ich in Bad Homburg v.d.H. geboren. Ich besuchte zunächst die Volksschule in Dornholzhausen/Ts. und anschließend das Kaiserin-Friedrich-Gymnasium in Bad Homburg v.d.H. Von Januar 1960 an war ich Schüler des Gymnasiums an der Gesamtschule Kirchhain (Bez. Kassel); dort legte ich am 10. Februar 1965 die Reifeprüfung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig ab.

Im Sommersemester 1965 begann ich das Studium der Physik an der Philipps-Universität in Marburg/Lahn. Am 18.4.1967 bestand ich dort die Diplomvorprüfung und im Juni 1969 den mündlichen Teil der Diplomhauptprüfung. Im Anschluß daran begann ich meine Diplomarbeit in experimenteller Kernphysik mit dem Thema "Entwurf und Bau eines ladungsunabhängigen Zeitmarkengebers für den gepulsten 4 MV-van-de-Graaff-Beschleuniger", die ich im August 1971 abschloß. Die Diplomhauptprüfung bestand ich am 23.8.1971.

Seit September 1971 beschäftigte ich mich mit theoretischer Hochenergiephysik; mit den Untersuchungen zur vorliegenden Arbeit begann ich im Herbst 1972.

Vom 1.4.1972 bis zum 30.9.1974 hatte ich ein Promotions-Stipendium nach dem Graduierten-Förderungsgesetz, in der übrigen Zeit war ich als wissenschaftliche Hilfskraft bzw. wissenschaftlicher Angestellter im Fachbereich Physik der Universität Marburg tätig. Seit dem 1.9.1975 bin ich im Fachbereich Geowissenschaften der Universität als wissenschaftlicher Mitarbeiter von Herrn Prof. Dr. E. Hellner mit der Dokumentation von Kristallstrukturen beschäftigt.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren
Bock, Cappeller, Ganßauge, Gradmann, Grawert, Großmann, Kamke,
Kerler, Madelung, Petzold, Richter, Stuke, Suchy, Walcher,
Wolter

in Physik,

Avakumović, Huckemann, Körner, Niemeyer, Peyerimhoff,
Wirsing

in Mathematik,

Dimroth, Mahr, Pfeil

in Chemie,

Kuhn

in Physikalischer Chemie.

